

• (٢) •

• (فهرست كتاب الجبر) •

صفحة

مقدمة في علم الجبر	٢
مقدمة في بيان العلامات والاصطلاحات	٢
في الكميات السالبة	٦
• (الباب الاول) •	٠
• (في العمليات الجبرية) •	
في تعريف الحدود المتشابهة وانماها	٨
في الجمع	٩
في الطرح	١٠
• في الضرب •	١٢
في القسمة	١٨
في الكسور	٢٢
في الاسس السالبة	٣٥

• (الباب الثاني) •

في المعادلات والمسائل التي بدرجة اولى	٣٧
في بيان المعادلات الدرجة الاولى والاولى والاولى	٣٨
في المعادلات ذات الدرجة الاولى وبقوة اذ لا ميل	٤٢
• مسائل من الدرجة الاولى •	٥٥
انواع من مسائل المسائل التي بدرجة اولى	٦٣
مناقشة عامة للمعادلات ذات الدرجة الاولى	٦٤

• (الباب الثالث) •

(في المراح والجذرات البيعي والمعادلات والمسائل التي بدرجة ثانية)

في المربع والجذر التربيعي	٧٣
في حساب الجذور الصم ذات الدرجة الثانية والثالثة	٨٣

٨٤ • الكلام على جمع تلك الجذور وطرحها

٨٤ في الكلام على ضرب تلك الجذور

٨٥ في قسمة الجذور

• (في المعادلات والمسائل ذات الدرجة الثانية) •

٩١ في المعادلات ذات الدرجة الثانية والمجهول الواحد

٩١ في المعادلة غير التامة ذات الدرجة الثانية

٩٣ في المعادلة التامة ذات الدرجة الثانية

٩٧ في المناقشات العمومية للمعادلات ذات الدرجة الثانية

١٠٦ في مسائل الدرجة الثانية

• (السابع الرابع) •

• (في التناسلات والمتواليات العددية والهندسية واللوغاريتم) •

١٢٩ في التناسلة العددية اى التفاضلية

١٣٠ في المقاسمة الهندسية

١٣٤ في المتواليات العددية

١٣٨ مسائل يطلب حلها من الطلبة

١٣٨ في المتواليات التقسيمية اى الهندسية

١٤٣ مسائل تحل بواسطة المتواليات الهندسية

١٤٥ في اللوغاريتم

١٤٩ في اللوغاريتمات التى اساسها ١٠ واستعمال الجداول

اللوغاريتمية

١٥٠ في الختم اللوغاريتمى

١٥٣ في استعمال الجداول اللوغاريتمية فى العمليات الحسابية

١٥٣ فى شرح جدول اللوغاريتمات العرب واستعماله

• (الباب الخامس) •

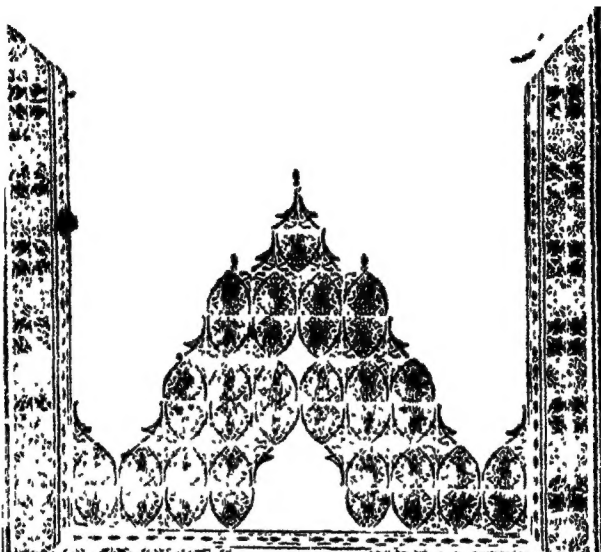
في مسائل بحال ابتداء هذه الختم روتطية تعليمها تقرر النلامنة

وتقرر مدتها في هذا العلم ومن مرتبة بتسبب ترتيب قواعد

مسائل خمس الدرجة الأولى ١٦٠

مسائل تحل بواسطة القواعد المقررة في الدرجة الثانية ١٦١

مسائل تحل بواسطة قواعد المتواليات العددية ١٦٢



علم الجهر

بسم الله الرحمن الرحيم

نعمتك يا بارق قلوب المكسرين * لا يقاومها شكر الشاكرين * أدلا يجمعها
 سائر بعد * ولا يعرف باقي طرحها احد * ضرتها على وجودك اراها
 * تدككها اساس المحدثين * وقسمتها حكمتك فلا عتاب * ان في ذلك
 لذكرى لا ولى الالباب * فهي اجل ان يعرف قدرها * او يدرك بالاستخرا
 حدرها * فحمدك اللهم على ما اوليت * وشكر فضل جودك على
 ما اسديت * وصلى وسلم على سيد ولد عدنان * الذى نسع دينه جميع
 الاديان * محمد المنتخب من اعلا ارومه * المعوث من حير حروفه *
 وعلى الخلفاء الراشدين * وآله وصحبه اجمعين * خصوصا سيف السطوة
 المتسمى * ابي الحسن على المرتضى * القاتل من قلب اقواه * لا يعرف
 الجذر الاسم الا الله * ما سمعت جملة ورقاء * وحن مستاق
 الى اللقاء

وبهذا ظلت تعلق ارادة الاصنى الإعظم * والداورى الاكرم * بتربية
 العساكر المصرية * وعدم حرمانهم من الفنون العسكرية * وكان من
 بجله وسائلها * وبما لا غناء عنه لمائلها * علم الجبر * العظيم القدر *
 صدراً مره الى من اجابه السعد بليك * ناظر المدارس الثلاث على يلك *
 بعمل منتخب لهم لطيف للمنى * جليل القدر فى المعنى * فأحال ذلك
 على الماهر اللبيب * والمودعى الارب * صاحب الفطنة الوفى الوعد *
 عامر افندى سعد * فانتخبه من مختصر الاعمال الجبرية * الذى ترجمه
 بالمهندسخانة الخديوية * من حاز من كل فن طرفاً * محمد افندى مصطفى *
 وقد زاد عليه الاول قواعد مهمه * و اضاف اليه مسائل نافعة به *
 ساعده فى ترجمتها من الفرنسية طويل الباع * ابراهيم افندى البياع *
 فحاء محتويات على حل المعادلات بالدرجتين * وعلى المتناسبات والمتواليات
 وما يتعلق بهذين * فان لهماد خلا فى حل المسائل العظيمة * وفى حساب
 كورم القلل الجسيمه * المعتاد تشكيلا بحججيات الطوبجية * وعلى مجت
 اللوغاريتم العظيم الاهميه * وقد تسم بجائمة لطيفه * محتوية على مسائل
 شريفة * مرتبة كترتيب قواعده الكلية * منتخبة للعساكر الجبرية *
 * (مقدمة) *

رعم بعض الناس ان هذا العلم يسمى باسم اقل من اشتعل به ولا اصل لهذا
 الرعم فى الكتب الاسلامية ان الذى اخترعه ابوبكر الخوارزمى وسماه بعلم
 الجبر والمقابلة لكن لم يعرف الرمس الذى اخترع فيه وقد قيل ان بلاد اسبانيا
 لما كانت فى ايدى العرب مجاورة لبلاد افرقية اكتسبت هذا العلم منهم فى نحو
 سنة ١٠٠٠ ألف ومائة مسيحية وفى نحو سنة ١٠٠٠ ألف وخمسة مائة حنفية
 تجار ايطاليين من افرقية بسخنة من كتب هذا العلم الى بلاده فاشتغل به
 الايطاليون لكن لم يتصلوا على ازيد من حل معادلة بدرجة رابعة وقد دخل
 هذا العلم بلاد النمسا واخذ فى التقدم وبلاد الانجليز ثم انتقل الى فرنسا
 فى سنة ١٥٥٨ ألف وخمسة مائة وخمسين وثمانية واسرع فى التقدم على يد

المؤلف فرانسوا ميت الباريسي وهو أقبل شخص طبق الجبر على الهندسة
وفي القرن السابع عشر تقدم هذا العلم تقدماً واسعاً من وقت إلى آخر حيث
ظهر فيه مشاهير المؤلفين كالمؤلف نونون وديكارن الشهيرين وامثالهما
وفي القرن الثامن عشر ظهر المؤلف لجرانج وكون وللاس ونحوهما
من فحول المؤلفين الذين تموا فوائده وترتبوا ترتيباً منتظماً

وبتقدم هذا العلم تقدمت العلوم الهندسية والميكانيكية والفلكية
والفنون العسكرية بل وجميع الصنائع وذلك كان هذا العلم من أنفع العلوم
لا يكرهه الا جاهل وذلك ان علم الهندسة قبل تقدم هذا العلم كان في حيز
الصعق حتى ان كثيراً من مسائله كان مستحيل الحل ومكث على تلك
الاستدالة مدة طويلة وكان ايضاً التوصل اراعيين التصايا الهندسية
صعباً اذ لا واسطة اذ ذلك تساعد العقول على مقاصدها فاضطر علماء هذا
العلم للبحث عن اثبات قواعد نظرية عامة حربية الوضع رقيقة المالك يتسبب
عما فلك بعض المشكلات فابتدوها وسموها بعلم الجبر وكان تصحيحه على يد أسير
الاورار * اراهيم عبد العنار * ولما انتهى للتمام * وادس وشاح الختام *
ومتمته بالكواكب الدرية * في الاعمال الجبرية * وقد آن ان شرع
في المقصود * فتقول بعون الملك المعهود

• مقدمة في علم الجبر •

(١) الغرض الاصل من علم الجبر حل المسائل العددية ومشكلات القضايا النظرية والعملية بوجه مختصر عام وانما يتوصل الى هذا العلم باستعمال الحروف والعلامات فالحروف تستعمل للدلالة على الاعداد ان كانت القضية حسابية وللدلالة على الخطوط أو السطوح والاجسام ان كانت القضية او المسئلة هندسية

• مقدمة في بيان العلامات والاصطلاحات •

تستعمل العلامات للدلالة بطريقتين الاختصار على الارتباطات الواقعة بين الكميات الجارية على العمل
فالعلامات الاصلية المستعملة هي

(اولا) علامة + وتدل على جمع عددين حين توضع بينهما ويلفظ بها زائد
مثال ذلك ٥ + ٣ يلفظ به ٥ زائد ٣ ويستدل بها على انه يلزم ضم العدد ٣ الى ٥

(وثانيا) علامة - وتدل على ان العدد التالي لها مطروح من العدد السابق لها ويلفظ بها ناقص

مثال ذلك ٥ - ٣ يلفظ به ٥ ناقص ٣ ويستدل بها على انه يلزم طرح العدد ٣ من ٥

(وثالثا) علامتا الضرب \times و \cdot وكلتا هاتين تدل على أن كذا مضروب في كذا ولا تستعمل النشابة الا في الحروف فقط ويمكن بيان حاصل ضرب العددين الميبين بحرفين بكتابة أحدهما بجانب الآخر بدون فاصل لحاصل ضرب ٥ في ٧ مثلا يمكن بياؤه هكذا 5×7 وحاصل ضرب ٣ في ٤ يمكن بياؤه هكذا $3 \cdot 4$

\times و \cdot أو \cdot و \times أو \cdot و

ويمكن بيان حاصل ضرب كيتين بجعل كليهما بين قوسين موضوعة احدهما بجانب الاخرى ولا يستعمل ذلك الا في المصاريف المركبة من حرفين أو جملة

(٣)

اجزاء متفاصلة عن بعضها بعلامة + أو - فحاصل ضرب \times - في \div + و يمكن بانه هكذا \div - \times (\div +) و حاصل ضرب \times - \div + ه في و يبين هكذا (\times - \div + ه) و

(ورابعا) علامة القسمة هكذا : أو شرطة افقية هكذا - وتستعملان كما تراه فيما اذا طلب مثلا خارج قسمة \div على \times فانه يبين هكذا \div : \times أو $\frac{\div}{\times}$ وكل منهما معناه \div مقسوم على \times .

(وخامسا) المكرر وهو العدد الذي يكتب عن يمين عدد آخر ممين بحرف او جملة حروف ويدل على عدد مرات تكرار العدد الآخر

مثال ذلك ه \div فانه يدل على أن حرف \div مكرر خمس مرات أي $\div \div \div \div \div$

(وسادسا) علامة التساوي هكذا = يلفظ بها مساو وتدل على التساوي بين كميتين قد وضعت بينهما مثال ذلك $\div = \times$ فانه يدل على تساوي المقدار \div بالمقدار \times

(وسابعا) علامتا < و > فان كلتا هاتين تدل على عدم تساوي الكميتين المفصولتين بها لكن الاولى تدل على المكرر والثانية على الصغر مثال ذلك $\div < \times$ وتلفظ هكذا \div اكبر من \times و $\times > \div$ وتلفظ هكذا \times اصغر من \div

(وثامنا) للدلالة على عدم تساوي كميتين بدون تمييز صغراهما عن كبرهما تستعمل هذه العلامة \neq مثال ذلك $\div \neq \times$ وتبين أن \div ليس مساويا \times

(٢) ويوجد علامتان ايضا احدهما تدل على قوة العدد والاخرى على جدره وقوة العدد هي حاصل ضرب مقترولين أو جملة مصاريب كل منهما مساو لهذا العدد ويقال ان العدد مرفوع الى القوة الثانية او الثالثة أو الرابعة وهكذا اذا كان حاصله مكونا من مصرولين أو ثلاثة مصاريب

أو أربعة وهكذا كل منها مساو لهذا العدد مثال ذلك $\times \times \times \times$ وهذا يدل على القوة الثالثة للعدد \times وتبين قوة العدد بكتابة \times عليه ما تلا حته الشغال بقليل عدد مرات دخوله مضروباً في هذه القوة ويسمى عدد المرات أساً فالقوة الرابعة للعدد \times تكتب هكذا \times^4 ويلفظ \times أس أربعة فالأس يدل على درجة القوة التي \times القوة الثانية أو عدد تسمى مربعاً والقوة الثالثة تسمى مكعباً

وجذر العدد اصله الذي اذا رفع لدرجة ما تحول منه العدد الى كور وهذا الجذر يسمى الجذر الثاني أو الثالث وهكذا اذا رفع الى القوة الثانية أو الثالثة وهكذا لاتتاح العدد المعلوم فالجذر الثاني يسمى الجذر التربيعي والجذر الثالث يسمى الجذر التكعيبي

فالعدد ٥ هو الجذر الثاني أو الجذر التربيعي للعدد ٢٥ $\sqrt{25}$ هو الجذر الرابع لعدد $\sqrt[4]{}$ ودرجة جذر العدد هي درجة القوة اللازمة لرفع هذا الجذر لينتج العدد المعلوم ويستدل على جذر العدد بوضع هذه العلامة $\sqrt{\quad}$ عليه مكتوباً بين شعبتيها العدد المبين لدرجة الجذر فيستدل على

الجذر التكعيبي للعدد $\sqrt[3]{}$ بهذه العلامة $\sqrt[3]{}$ ويلفظها الجذر التكعيبي للعدد $\sqrt[4]{}$ وتسمى طلب جذر المربع فلا حاجة لوضع $\sqrt[4]{}$ فوق العلامة فالجذر التربيعي للعدد ٧ يكتب هكذا $\sqrt{7}$

(٣) ويظهر لك ثمرة استعمال الحروف والعلامات الجبرية في حل ما اذا كان عدداً

مجموع عددين يساوي ٢٥ مفاصلهما يساوي ٩ والمطلوب معرفة كل من هذين العددين

ويكن حل هذه المسئلة بالقواعد الحسابية غير أن استعمال العلامات الجبرية أ- سرراً سهل وذلك بأن يرمز لاصغر العددين المجهولين بالحرف x منه وحيث أن اصلهما مساو للعدد ٩ يكون مقدار العدد الآخر $9 - x$ ومن حيث أن اصلهما يساوي ٢٥ يكون مساوياً لعدد ٢٥

(٥)

يحدث هذا التساوى؟

$$٢٥ = ٩ + ١٦ \text{ أو } ٢٥ = ٩ + ١٦$$

وحيث أن ٢ + ٩ يساوى ١١ يكون ٢ مساويا ٢٥ - ٩

$$\text{أى } ٢ = ٢٥ - ٩ \text{ أى } ٢ = ١٦$$

ومن حيث أن ٢ + ١٦ يساوى ١٨ يكون ٢ = نصف ١٦

$$\text{أو } ٢ = \frac{١٦}{٢} = ٨$$

فإذا كان العدد الأصغر مساويا ٨ والأكبر مساويا ٩ + ٨

$$١٧ \text{ لأن } ١٧ = ٨ + ٩ \text{ و } ٢٥ = ٨ - ١٧$$

فقد ظهر من ذلك أن في استعمال العلامات الجبرية اختصارا وبساطة لحل

المسئلة غير أن هذا الحل غير عام ويجعله عاما كما هو الغرض من علم الجبر

تستعمل الحروف وكيفية ذلك أن يقال ليكن x رمز الحاصل جمع

عدين x و y رمز الفاضلها والمطلوب معرفة كل من العددين بمعرض

أن x رمز العدد الأصغر يكون الأكبر $x + y$ فيحدث

$$٢٥ = x + y \text{ أو } ٢٥ = x + y$$

$$٢ = x + y \text{ أو } ٢ = x + y$$

$$٢ = x - y \text{ أو } ٢ = x - y$$

$$x = \frac{٢٥ + ٢}{٢}$$

وحيث أن العدد الأصغر يساوى $\frac{٢٥ + ٢}{٢}$ يكون الأكبر الذى هو $x + y$

$$\text{مساويا } \frac{٢٥ + ٢}{٢} + \frac{٢٥ - ٢}{٢} = \frac{٢٥}{٢} + \frac{٢٥}{٢} = ٢٥$$

$$= \frac{٢٥ + ٢}{٢}$$

فإذا كان العدد الأصغر مساويا $\frac{٢٥ - ٢}{٢}$ والأكبر مساويا $\frac{٢٥ + ٢}{٢}$

وليتسه الى أن هذين الساتحين لا يختصان بمقدارين مراديين x و y .

حينئذ يكون الحاصل عاما وهذا بالتجانس المسمى قانون بيمكن استعمالهما

بدون واسطة في حل المسائل المشابهة لهذه المسئلة لانه إذا فرض أن المطلوب

يجاد العددين اللذين حاصل جمعهما = ١٣٧ وفاضلها = ٥٩

ج

(٦)

(٧)*

فالجواب أن يقال إذا كان الربح > أكبر من الخسارة & فرأس المال
يزيد بقدر > — & لكن إذا فاقت الخسارة الربح بأن كان < & فقد
نقص رأس المال بقدر & & فادن كسبه & — & الدالة على
زيادة رأس المال لا تدل الاعلى عملية طرح مستحيل حيث كان < &
فيه اروح الاصغر من الاكبر وتوضع العلامة — امام الباقي ليعلم أن السامع
ليس ربحاً اسم الى رأس المال بل خسارة تطرح من رأس المال
فإذا فرض أن < = ٧٠٠٠ و > = ٤٠٠٠ فإنه يوجد ربح قدره ٣٠٠٠
وإذا فرض أن < = ٤٠٠٠ و > = ٧٠٠٠ فإنه يوجد خسارة قدرها ٣٠٠٠
لكن يقال على وجه الأرد أن رأس المال ربح بقدر — ٣٠٠٠ و
كان ذلك حلالم الممتد

(٤) وإذا اعتبرنا حينئذ في التدار > — & ان المقدار > ثابت
والتدار & متراو من ابتدا الله & حدثت فوائد منه قصصه بقي كان &
= > يكن الرق > — & مساواة روادا اسراء ار &
نار ياهد — & كميات اية وكميات & كبره كانت — & كميات
النبي — & كبره بأبوابا عيار متاديرها المثلد — & ادا فرض > = ٣
وهو من على التوالي

= ٠ و ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ٦ و ٧ و ٨ و ٩ و ١٠ و الخ
كانت متادير
= ٣ و ٢ و ١ و ٠ و ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ٦ و ٧ و ٨ و ٩ و ١٠ و الخ
و ين أن المتادير السالبة معاقبه للمقادير الموحدة التي هي ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ٦ و ٧ و ٨ و ٩ و ١٠ و الخ
و — & راصغر من صفر ومن حيث ان الكميات السالبة الصغيرة
المتادير المتأق تأتي بعد الكميات السالبة الصغيرة المقدار تعتبر اقل منها ولذا
يشاددان

— ٢ أصغر من صفر و — ٥ أصغر من — ٢ وباستعمال العلامةين
< و > يكون

واحدة في الكمية ذات الحدود $٣ ح٢ - ٤ ح٢ - ٧ ح٢ + ٢ ح٢$
مثلا كمية رباعية متجانسة خماسية الدرجة

(٩) الحدود المركبة من امر في متحدة الصورة والاسس تسمى حدودا متشابهة ومتى كانت الكمية ذات الحدود محتوية على حدود متشابهة امكن اختصارها بتحويل هذه الحدود الى حد واحد فالكمية ذات الحدود $٥ ح٢ - ٨ ح٢ + ٧ ح٢ - ٢ ح٢$ يمكن وضعها بهذه الصورة $٥ ح٢ + ٧ ح٢ - ٨ ح٢ - ٢ ح٢$

لحدا $٥ ح٢$ و $٧ ح٢$ يدلان على خمسة امثال $ح٢$ رائدا سبعة امثال $ح٢$ اثنى $١٢ ح٢$ فاذا نـ مكن استعواضهما بكمية $١٢ ح٢$ وحدا $٨ ح٢$ و $٢ ح٢$ يؤلان الى كمية $١٠ ح٢$ كما آل الحدان الموجبان الى كمية $١٢ ح٢$ فحينئذ تؤول الكمية ذات الحدود الى $١٢ ح٢ - ١٠ ح٢$ وبها يستدل على انه يلزم طرح $١٠ ح٢$ من $١٢ ح٢$ فيكون الباقي $٢ ح٢$ وهو الذي آلت اليه الكمية ذات الحدود ومثل ذلك يجري في

$$٧ ح٢ - ٩ ح٢ - ٥ ح٢ - ٣ ح٢ + ٦ ح٢ = ١٣ ح٢ - ١٧ ح٢ = - ٤ ح٢$$

فالقاعدة العمومية لتحويل جلة حدود متشابهة الى حد واحد ان تجمع لمكررات الموجبة والمكررات السالبة ثم يطرح المكرر الاصغر من الاكبر يوضع علامة الاكبر امام الناتج ثم توضع الحروف المشتركة بأسسها الاصطية بحانب الناتج المذكور

(في الجمع)

(١٠) جمع الكسيتين $٣ - ٢$ و $٤ هـ - ٥ و$ يجري العمل كـ

• (١٠) •

$$٢٣ - ٤٢$$

$$٤٤ - ٥٥$$

$$\hline ٢٣ - ٤٢ + ٤٤ - ٥٥$$

فيضم أولا ٤٤ الى ٢٣ - ٤٢ بان يوضع ٤٤ بعد ٢٣ - ٤٢
بالعلامة + فيحصل ٢٣ - ٤٢ + ٤٤ وحيث ان هذا الناتج
أكبر من المطلوب بالمقدار ٥٥ يطرح ٥٥ من ٢٣ - ٤٢ + ٤٤
اي يكتب ٥٥ بعده بالعلامة - فاذن يكون حاصل الجمع المطلوب

$$٢٣ - ٤٢ + ٤٤ - ٥٥$$

واذا كان حاصل الجمع محتويا على حدود متشابهة وجب اختصارها
فالقاعدة العمومية لجمع جمله كميات ان تكتب متتالية كما هي موجودة ثم
تختصر الحدود المتشابهة ان وجدت

• (تنبيه) •

توضع الحدود المتشابهة للكميات ذات الحدود تحت بعضها في العمل ثم يكتب
من اول الامر الحاصل بالاختصار وصورة العمل هكذا

$$٨ \text{ د } ٤ - ٥ \text{ د } ٣ - ٦ \text{ د } ٢ + ٧ \text{ د } ١$$

$$٦ \text{ د } ٢ - ٤ \text{ د } ٣ + ٥ \text{ د } ٤$$

$$- ٥ \text{ د } ٣ + ٦ \text{ د } ٢ - ٧ \text{ د } ١$$

$$٢ \text{ د } ١ + ٣ \text{ د } ٢ + ٤ \text{ د } ٣ - ٥ \text{ د } ٤$$

$$\hline ١١ \text{ د } ١ + ٢ \text{ د } ٢ + ٣ \text{ د } ٣$$

• (في الطرح) •

(١١) طرح الكمية ذات الحدود ٦ د ٤ - ٥ د ٣ من الكمية

ذات الحدود ٥ د ٣ - ٦ د ٢ يجرى العمل هكذا

$$٥ \text{ د } ٣ - ٦ \text{ د } ٢$$

$$٦ \text{ د } ٢ - ٥ \text{ د } ٣$$

$$\hline ٥ \text{ د } ٣ - ٦ \text{ د } ٢ + ٦ \text{ د } ٢ - ٥ \text{ د } ٣$$

فيطرح

مطروح من القيمة ذات الحدود $٥ \text{ د } ٢ - ٢ \text{ د } ٢$ اولاً المتشابهة
 $٢ \text{ د } ٢$ يكتبها بعدها بالعلامة $+$ فيحصل $٥ \text{ د } ٢ - ٢ \text{ د } ٢$
 $- ٦ \text{ د } ٢$ لكن حيث ان $٦ \text{ د } ٢$ اكبر من المطروح بمقدار $٤ \text{ د } ٢$
 فالنتيجة وهو $٥ \text{ د } ٢ - ٢ \text{ د } ٢ - ٦ \text{ د } ٢$ يكون اصغر من الناتج
 الحقيقي بقدر $٤ \text{ د } ٢$ فيضم له هذا المقدار بالعلامة $+$ فيكون الناتج
 حينئذ هكذا

$$٥ \text{ د } ٢ - ٢ \text{ د } ٢ - ٦ \text{ د } ٢ + ٤ \text{ د } ٢$$

وإذا كان الناتج الذي هو باقي الطرح محتوياً على حدود متشابهة وجب
 اختصارها

فالقاعدة العمومية لطرح كمية من أخرى أن تكتب الكمية التي يراد
 طرحها بجانب الأخرى مع تعيير جميع علامات حدودها واختصار الحدود
 المتشابهة ان وجدت

-(تنبيهان)-

الاول اذا اريد بيان باقي الطرح من غير اجراء العمل في المثال السابق وضع
 هذه الصورة

$$٥ \text{ د } ٢ - ٢ \text{ د } ٢ - (٦ \text{ د } ٢ - ٤ \text{ د } ٢)$$

اعني للدلالة على طرح كمية ذات حدود من مثلها تحصر الكمية التي يراد
 طرحها بين قوسين بهذه الصورة () وتكتب جانب المطروح منه جهة
 اليسار مفصولة بالعلامة - واذا اريد اجراء عملية الطرح يحذف
 القوسان وتعير علامة الحدود المحصورة بينهما

الثاني متى وجدت حدود متشابهة وصغت في العمل تحت بعضها ثم تعير
 علامات المطروح وتختصر الحدود المتشابهة وهالكيفية العمل

$$٤ \text{ د } ٢ - ٧ \text{ د } ٢ - ٦ \text{ د } ٢ + ٣ \text{ د } ٢$$

$$٢٠ \text{ د } ٢ + ٤ \text{ د } ٢ - ٥ \text{ د } ٢ - ٥ \text{ د } ٢$$

$$٢ \text{ د } ٢ - ١١ \text{ د } ٢ - ١٠ \text{ د } ٢ + ٨ \text{ د } ٢$$

(١٤) قد اجرينا اثبات قواعد الجمع والنظر على مجموع كميات متنوعة متفاصلة بعلامتي + و - فان قلت هل يجب ان تكون هذه القواعد مطبقة على الحدود المنفردة فالجواب نعم يقال ان تطبيق هذه القواعد على الكميات السالبة لا معنى له على ان الشاعذة التي يراد سلوكها في التطبيق يحتاج اثباتها الى واسطة وهي غير معروفة لنا فينبغي لا معنى لجمع العددين + ٧ - ٩ و - ٩ ٥ ولا طرح العددين - ٢ ٥ و - ٨ ٥ لكن حيث ان علم الجبر يوصل في الغالب لعمليات من هذا القبيل انفقوا على ان القواعد المنبثقة للكميات ذات الحدود تكون جارية على الحدود المنفردة وهي قواعد لا تتوقف الاعلى حفظ العلامات او تغييرها ومع ذلك فالجبرية هي التي احوجتهم الى هذا الاتفاق

حاصل جمع الأعداد - ٥ و - ٧ و - ٣ مثلاً هو - ١٥ وبقي
طرح - ٧ من - ٥ هو + ٢ لانه تغيير علامة المطروح - ٧
يصير + ٧ ثم ربط هذا الناتج بالمطروح منه - ٥ فيحدث - ٥
+ ٧ أي + ٢

ومثل هذا يقال في شرب حديد منقردين ولا حاجة لذكره في القسمة لأن قواعد عمليات التسمية ناتجة من قواعد عمليات الضرب

(في الضرب)

(١٣) اذا فرض اولاً أن المطلوب ضرب حدثي آخر كان يراد مثلاً ضرب
 ٤ × ٣ في ٣ × ٢ هـ فحاصل الضرب يمكن وضعه بهذه الصورة ٤ × ٣ × ٢ × ٢ هـ
 أو ٤ × ٣ × ٢ × ٢ هـ واداً
 غير ترتيب المصاريب حدثي ٤ × ٣ × ٢ × ٢ هـ
 وبتحليل ٢ × ٢ هـ و ٣ × ٢ هـ الخ الى مضاريبها يحدث

$\begin{aligned} & \text{هـ } \times \text{ د } \times \text{ س } \times \text{ ز } \times \text{ ح } \times \text{ ط } \times \text{ ث } \times \text{ ج } \times \text{ ب } \times \text{ ت } \times \text{ ث } \times \text{ ك } \times \text{ خ } \\ & \times \text{ د } \times \text{ هـ } \times \text{ ز } \times \text{ ح } \times \text{ ط } \times \text{ ث } = ٤ \times ٣ \text{ ومن حيث أن } \\ & \text{د} = \text{س} \times \text{ز} \times \text{ح} \times \text{ط} \times \text{ث} \quad \text{و} \quad \text{هـ} \times \text{د} = \text{ك} \end{aligned}$

فالقاعدة العمومية لضرب هـ في آخر ان يضرب ابتداء مكرر الحد الاول في مكرر الحد الثاني ثم يكتب على شمال حاصل الضرب المذكور الحروف التي لم تكن مشتركة في كل من المضروبين كما هي ثم يكتب الحرف المشترك لثاباس مساو لحاصل جمع اسية في المضروبين

(تنبيه)

الحالات الثلاث المحصورة في هذه القاعدة العمومية تسمى قاعدة المكررات وقاعدة الحروف وقاعدة الاسس

(١٤) لضرب كمية ذات حدود في مثلها نحو $٥ - ٤$ في $٥ - ٤$ و يجري العمل هكذا

$٥ - ٤$ مضروب

$٥ - ٤$ مضروب فيه

$٥ - ٤$ هـ $٥ - ٤$ و هـ حاصل الضرب
في ضرب اولي ٥ في هـ فحاصل ضرب ٥ في هـ يكون مينا بالحد
 ٥ غير أنه بضرب ٥ في هـ ازداد المضروب بقدر ٤ فاذا يكون حاصل
الضرب ازيد بمقدار ٤ مضروباً في هـ أي بمقدار ٥ فيلزم أن يطرح ٥
من ٥ فيحدث ٥ - ٥ وبأخذ ٥ مضروباً فيه يزداد بمقدار ٥
فحاصل الضرب ٥ - ٥ يكون ازيد بحاصل ضرب ٥ - ٤ في ٥ و
المساوي ٥ - ٥ كما تقدم في إيجاد حاصل ضرب ٥ - ٤ في هـ
فاذا طرح حاصل الضرب ٥ - ٥ كما تقدم في (بند ١١) من ٥
- ٥ فالنتيجة ٥ - ٥ - ٥ + ٥ هو حاصل الضرب
المطلوب وينتج من ذلك انه لضرب كمية ذات حدود في مثلها يجب أن يضرب
كل حد من المضروب في كل حد من المضروب فيه ويقرن كل حاصل حرك
بالعلامة + اذا اتحدت علامتا مضروبيه وبالعلامة - اذا اختلفت

مما هما مثال ذلك أن يراد ضرب

$$٥٠٠٠ - ٢٠٠٠ + ٣٠٠٠ - ٤٠٠٠ + ٥٠٠٠ - ٦٠٠٠ + ٧٠٠٠ - ٨٠٠٠ + ٩٠٠٠ - ١٠٠٠٠$$

وليتنبه الى انه متى اجريت عملية الضرب كما تقدم تقتصر الحدود المتشابهة من
الحاصل ان وجدت ولتسهيل هذه العملية يرتب المضروبان بالنسبة للدرجة
التصاعدية أو التنازلية لحرف واحد فيهما

ويقال ان الكمية مرتبة بالنسبة للدرجات التصاعدية أو التنازلية طرف
متى كانت اسس هذا الطرف آخذة في التصاعد أو التنازل من ابتدا الحد
الاول الى الحد الاخير فإذا اجرنا هذا الترتيب على المضروبين المتقدمين
بالنسبة للدرجات التنازلية لحرف x يحدث

$$\begin{array}{ccccccc} & & ٥ & ٤ & ٣٢ & ٢٢ & ٤ & ٥ \\ & & ٥٨ & - ٥٧ + & ٥٦ + & ٥٤ - & ٥٣ + & ٥٢ - \\ & & & & & & ٢ & ٢ & ٢ \\ & & & & & & ٥٤ - & ٥٥ + & ٥٦ - \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} ٦٢ & ٥٣ & ٤٤ & ٣٥ & ٢٦ & ١٧ \\ ٥٥٦ + & ٥٤٩ - & ٥٣٥ + & ٥٢٨ - & ٥٢١ + & ٥١٤ - \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} ٧ & ٦٢ & ٥٣ & ٤٤ & ٣٥ & ٢٦ \\ ٥٤٠ - & ٥٣٥ + & ٥٢٥ + & ٥٢٠ + & ٥١٥ - & ٥١٠ + \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} ٨ & ٧ & ٦٢ & ٥٣ & ٤٤ & ٣٥ \\ ٥٣٢ + & ٥٢٨ - & ٥٢٠ - & ٥١٦ + & ٥١٢ + & ٥٠٨ - \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} ٨ & ٧ & ٦٢ & ٥٣ & ٤٤ & ٣٥ & ٢٦ & ١٧ \\ ٥٣٢ + & ٥٢٨ - & ٥٢٠ - & ٥١٦ + & ٥١٢ + & ٥٠٨ - & ٥٠٤ + & ٥٠٠ - \end{array}$$

فيته غايه الاهتمام بوضع الحدود المتشابهة تحت بعضها في اجراء عمل
المضارب الجزئية وبعد اجراء الاختصار يحدث عين ما هي

$$\begin{array}{ccccccc} ٨ & ٧ & ٦٢ & ٥٣ & ٤٤ & ٣٥ & ٢٦ & ١٧ \\ ٥٣٢ + & ٥٢٨ - & ٥٢٠ - & ٥١٦ + & ٥١٢ + & ٥٠٨ - & ٥٠٤ + & ٥٠٠ - \end{array}$$

فالتساعده العمومية لتحصيل حاصل ضرب كيتين ذاتي حدود في بعضهما ان
ترتب هاتان الكميتان بالنسبة للدرجات التصاعدية أو التنازلية لحرف
واحد فيهما ويضرب كل حد من المضروب في كل حد من المضروب فيه
ثم يقرن حاصلهما بالعلامة $+$ اذا التحدت علامتهما أو بالعلامة $-$ اذا

التي هي علاماتهما ثم تختصر الحدود المتشابهة ان وجدت
 (تتبعه) *

مقرب مضروباً حاصل ضرب بالنسبة للدرجات التنازلية لحرف واحد
 لحاصل ضرب الحد الاول من المضروب في الحد الاول من المضروب فيه
 يحتوي على حرف الترتيب بأس اكبر من كل من أسه في الحواصل الاخر
 الجزئية لانهما الحدان المشتغلان على حرف الترتيب بأس اكبر من أس كل
 من الحدود المشتغلة على الحرف المذكور وحيث وجد حاصل جزئى لا يمكن
 اختصاره مع آخرى يكون هو الحد الاول لحاصل الضرب المطلوب المرتب
 بترتيب مضاربه

ومثل ذلك يقال في حاصل ضرب الحد الاخير من المضروب في الحد الاخير
 من المضروب فيه فيكون هو الحد الاخير لحاصل الضرب المطلوب
 ومثل ذلك يقال ايضا في ترتيب الكميتين ذاتى الحدود بالنسبة للدرجات
 التصاعدية لحرف فيكون أس الحد الاول لحاصل الضرب الاصلى اصغر من
 أس كل من الحدود الاخر وأس الحد الاخير اكبرها

فعلى ذلك اذا كان حاصل الضرب مرتباً بترتيب مضروبيه فالحد الاول منه
 يكون في الحقيقة حاصل ضرب الحد الاول من المضروب في الحد الاول من
 المضروب فيه والحد الاخير منه يكون في الحقيقة حاصل الضرب للحد الاخير
 من المضروب في الحد الاخير من المضروب فيه

(١٥) اقل عدد الحدود التي يشتمل عليها حاصل ضرب كميتين ذاتى حدود
 في بعضهما اثنان لانه قد ثبت ان حاصل ضرب كميتين ذاتى حدود يكون
 مشتملاً اقل ما هنالك على حدين لا يمكن اختصارهما واكثر عدد الحدود
 التي يشتمل عليها حاصل ضرب كميتين ذاتى حدود في بعضهما يكون مساوياً
 لحاصل ضرب عدد حدود المضروب في عدد حدود المضروب فيه اذا لم يحتو
 هذا الحاصل على حدود يمكن اختصارها

(١٦) حاصل ضرب كميتين ذاتى حدود متجانسة كمية ذات حدود متجانسة

درجتها مساوية لحاصل جمع درجتي مضروبها لان درجة كل حاصل ضرب
 جزئي تساوي حاصل جمع درجتي مضروبيه كما هي قاعدة ضرب حدين في بعضهما
 واذا احتوت الكمية ذات الحدود على حرف اسه منحصر في بعض حدودها
 اوفى جميعها اعتبرت هذه الحدود حدا واحدا بان تنحصر هذه الحدود بين
 قوسين ماعدا الحرف المذكور وتجعل ~~هـ~~ ككرر الحرف المذكور مثال ذلك

$$2^2 3^2 4^2 - 2^2 3^2 4^2 - 2^2 3^2 4^2 \text{ قترن هكذا}$$

$$(2^2 - 2^2 - 2^2 - 2^2) (3^2 - 3^2 - 3^2 - 3^2)$$

فالكمية $2^2 - 2^2 - 2^2 - 2^2$ تعتبر ~~هـ~~ ككرر الحرف 2^2 وهي مرتبة
 بحسب الدرجات التنازلية للحرف 2 ولك ان ترتبها بحسب الدرجات
 التنازلية للحرف $هـ$ هكذا

$$2^2 (2^2 + 2^2 - 2^2 - 2^2)$$

ويمكن وضع الكمية $(2^2 - 2^2 - 2^2 - 2^2)$ مرتبة بهذه
 الصورة او بهذه الصورة

$$\begin{array}{c|c} 2^2 & 2^2 3^2 - \\ & 2^2 3^2 - \\ & 2^2 3^2 + \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 2^2 & 2^2 + \\ & 2^2 3^2 - \\ & 2^2 3^2 - \end{array}$$

وسياتى استعمال ذلك في القسمة وحل المعادلات الحرفية واجراء عملية
 الصرب ~~هـ~~ كون على كيفيتي الوضعين المتقدمين وهما مثلا لتوضيح
 ذلك

(الكيفية الاولى)

$$\text{مضروب} \quad 2^2 (2^2 - 2^2 - 2^2 - 2^2) - 2^2 (2^2 + 2^2 - 2^2 - 2^2)$$

$$\text{مضروب فيه} \quad 2^2 (2^2 + 2^2 - 2^2 - 2^2) + 2^2 (2^2 - 2^2 - 2^2 - 2^2)$$

$$\frac{2^2 (2^2 + 2^2 - 2^2 - 2^2) - 2^2 (2^2 + 2^2 - 2^2 - 2^2)}{2^2 (2^2 + 2^2 - 2^2 - 2^2) - 2^2 (2^2 + 2^2 - 2^2 - 2^2)}$$

$$+ 2^2 (2^2 - 2^2 - 2^2 - 2^2) - 2^2 (2^2 + 2^2 - 2^2 - 2^2)$$

$$\frac{2^2 (2^2 + 2^2 - 2^2 - 2^2) - 2^2 (2^2 + 2^2 - 2^2 - 2^2)}{2^2 (2^2 + 2^2 - 2^2 - 2^2) - 2^2 (2^2 + 2^2 - 2^2 - 2^2)} \text{ فاذن}$$



ونفخ من ذلك أن مربع كيسة ذات حدين يحتوي على مربع الحد الاول زائدا
ضعف حاصل ضرب الحد الاول في الثاني زائدا مربع الحد الثاني

الثانية اذا ضرب $٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ٩ + ١٠ + ١١ + ١٢$ في $١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ٩ + ١٠ + ١١ + ١٢$ أي $(٢ + ٣) = ٥$ $= ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ٩ + ١٠ + ١١ + ١٢$

ونفخ من ذلك ان مكعب كيسة ذات حدين يحتوي على مكعب الحد الاول
زائدا حاصل ضرب ثلاثة امثال الاول في الثاني زائدا حاصل ضرب
ثلاثة امثال الاول في تربيعة الثاني زائدا مكعب الثاني

الثالثة اذا ضرب $(٢ + ٣)$ في $(٣ - ٢)$ ينتج $(٢ + ٣) (٣ - ٢) = ٣ - ٢ = ١$

ونفخ من ذلك ان حاصل ضرب مجموع كيتين في فاضلهما يساوي الفرق بين
مربعيهما فيكون الفرق بين مربعي كيتين مساويا لحاصل ضرب جمع جذريهما
في فاضل الجذرين مثال ذلك

$$٢٥ \times ٢٩ - ٢١ \times ٢٥ = (٢٣ + ٢٥) (٢٣ - ٢٥) (٢٣ - ٢٥) \text{ وكذا } (٢٣ + ٢٥) (٢٣ - ٢٥) = ٢٣ - ٢٥$$

* (في القسمة) *

(١٨) اذا كان المطلوب قسمة حد على احريقال

اولا مكرر خارج القسمة يستخرج من تقسيم مكرر المقسوم على مكرر المقسوم عليه لان المقسوم يكون مساويا لحاصل ضرب المقسوم عليه في خارج القسمة وحيث أن مكرر حاصل ضرب يساوي حاصل ضرب مكرري مصروبيه كما في (نند ١٣) يكون مكرر المقسوم مساويا لحاصل ضرب مكرر المقسوم عليه في مكرر خارج القسمة فينبغي ان يكون مكرر خارج القسمة مساويا لمكرر المقسوم مقسوما على مكرر المقسوم عليه كما في قاعدة الاسس وثانيا اذا كان المقسوم محتويا على حرف ليس في المقسوم عليه يكتب في خارج القسمة عين ما في المقسوم لان المقسوم هو حاصل ضرب المقسوم عليه في خارج القسمة فكل حرف ليس في المقسوم عليه وهو داخل في المقسوم

يكتب الحرف الخارج القسمة (انظر بند ١٣ في قاعدة الحروف) ^١ ~~٢~~
 وثالثا إذا اتحد حرف في المقسوم والمقسوم عليه كتب ذلك الحرف
 في خارج القسمة بأس مساو لاسه في المقسوم ناقصا أسه في المقسوم عليه لأن
 المقسوم يساوى حاصل ضرب المقسوم عليه في خارج القسمة فحينئذ يكون
 اس الحرف من المقسوم مساويا لحاصل جمع اسيه في المقسوم عليه وخارج
 القسمة كما في (بند ١٣) فاذن يكون أس الحرف من خارج القسمة مساويا
 لاسه في المقسوم ناقصا لاسه في المقسوم عليه (انظر قاعدة الاسس)
 ورابعا إذا اتحدت علامتا المقسوم والمقسوم عليه كانت علامة خارج
 القسمة + وإذا اختلفت فهما كانت علامته - لانه اذا فرض أن
 علامة المقسوم عليه زائد وعلامة المقسوم الذى هو عبارة عن حاصل ضرب
 ناقص ~~يكون~~ علامتا مضروبيه متخالفة كما في (بند ١٤) وحيث أن
 علامة المقسوم عليه الذى هو عبارة عن احد المضروبين زائد تكون علامة
 خارج القسمة الذى هو عبارة عن المضروب الآخر ناقصا (انظر قاعدة
 العلامات)

فالقاعدة العمومية لتقسيم حد على آخر أن يقسم مكررا المقسوم على مكرر
 المقسوم عليه وتكتب الحروف الذى يحتوى عليها المقسوم دون المقسوم
 عليه عقب الناتج الاول باسمها الكائنة في المقسوم ثم تكتب الحروف
 المشتركة الكائنة في المقسوم والمقسوم عليه بأس مساو لفاضل اسسها
 الكائنة بهما في المقسوم والمقسوم عليه ويوضع في خارج القسمة علامة +
 اذا اتحدت علامتا الحدين وعلامة - اذا اختلفت علامتا هما
 وايضا هذه القاعدة يكون تقسيم $٢٤ \div ٢ = ١٢$ على $٦ \div ٢ = ٣$ هكذا

$$\frac{٢٤}{٦} \div \frac{٢}{٢} = \frac{٢٤}{٢} \div \frac{٢}{٢}$$

(تنبيه)

تقسيم حد على آخر غير ممكن اذا كان مكررا المقسوم غير قابل للقسمة على مكرر
 المقسوم عليه او كان حرف من المقسوم عليه غير موجود في المقسوم أو كان

٢ من حرف من المقسوم عليه أكبر من اسمه في المقسوم فاذا وجدت حالة من هذه الاحوال الثلاث جعل خارج القسمة ككسر اعني ادى يتحصر فقط ان قبل الاختصار بان تحذف منه المضارب المشترك في كل من حديه

حينئذ خارج قسمة $\frac{24}{3} \div \frac{4}{2} = 6$ على $18 \div 3 = 6$ يوضع بهذه الصورة $\frac{24}{18} \div \frac{4}{3} = \frac{6}{3}$ يحذف المضروب المشترك $6 \div 3 = 2$ من كل من الحدين

(١٩) اذا قسم $\frac{7}{2}$ على $\frac{3}{4}$ جريا على قاعدة الاسس يحدث $\frac{7}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{7}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$ ومن البديهي أن $\frac{7}{2} \div \frac{3}{4} = 1$ فاذا ن يكون $\frac{7}{2} = 1$ ونخرج من ذلك أن كل حرف اسمه صفري ساوى واحدا

(٢٠) ولشغل الآن بتقسيم كمية ذات حدود على مثلها فنفرض أن المقسوم $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ والمقسوم عليه $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ والخ خارج القسمة المجهول $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ والرموز $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ و $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ دالة على حدودها ما كانت وأن المقسوم والمقسوم عليه وخارج القسمة مرتبة بحسب الدرجات التنازلية للحرف من فاذا ن يكون وضع العمل هكذا

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \quad | \quad 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \quad | \quad 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\ \hline 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \end{array}$$

ثم يقال من المعلوم أن المقسوم يساوى المقسوم عليه مضروبا في خارج القسمة وتقدم في (تنبيه بند ١٤) انه اذا كان حاصل الضرب ومضروبه مرتبة بحسب حرف واحد كان الحد الاول لحاصل الضرب هو حاصل ضرب اول حد من المضروب في اول حد من المضروب فيه فيكون 1 مساويا لحاصل ضرب 1×1 واذا يستنتج 1 بتقسيم 1 على 1 وحيث علم الحد 1 يضرب المقسوم عليه في هذا الحد وي طرح حاصل الضرب من المقسوم فينتج باق هذه الصورة $0 + 0 + 0 + 0 + 0$

لاحتسب الا على حاصل ضرب المقسوم عليه في جزء خارج القسمة
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ الخ وحيث أن حاصل الضرب $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ ومضاربه
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ الخ و $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ الخ مرتبة بكيفية واحدة
 يسكون م مساويا لحاصل ضرب أ في $\frac{1}{2}$ (كما في تبنيه ١٤) فاذن
 يستخرج $\frac{1}{2}$ بتقسيم م على أ ثم يضرب $\frac{1}{2}$ في المقسوم عليه ويطرح
 الحاصل من الباقي م + $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ فينتج باقي جديد بهذه الصورة
 م + $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ الخ وبمثل ما تقدم يتوصل الى تقسيم ر على أ لحدوث
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ وهلم جرا

فالقاعدة العمومية لتقسيم ذات الحدود على مثلها ان يرتب المقسوم
 والمقسوم عليه بالنسبة للدرجة التصاعدية او التنازلية لحرف واحد
 ثم يقسم الحد الاول من المقسوم على الحد الاول من المقسوم عليه فيحدث
 الحد الاول من خارج القسمة ثم يضرب المقسوم عليه في الحد الاول من خارج
 القسمة ويطرح الحاصل من المقسوم ثم يقسم الحد الاول من الباقي على
 الحد الاول من المقسوم عليه فيحدث الحد الثاني من خارج القسمة ثم يضرب
 المقسوم عليه في الحد الثاني من خارج القسمة ويطرح الحاصل من الباقي
 الاول فيحدث باقي ثان يقسم على الحد الاول من المقسوم عليه لحدوث الحد
 الثالث من خارج القسمة ثم يجري العمل على هذا الموال حتى يصير الباقي
 صمراً أو غير قابل للقسمة على الحد الاول من المقسوم عليه

وإيضاح هذه القاعدة: يكون يتقسم ذات الحدود ١٨٧٨ - ١٨٧٩

$$70 + 56 - 572 \text{ على } 5722 + 290 + 571 -$$

$$S = 7ms + 70s + 1A - 521 + 571 - 571A + 770$$

$$\begin{array}{c} \text{P} \quad \text{P} \quad \text{P} \\ \hline \text{S7A} + \text{S7F} - \text{7V} \end{array}$$

الباقي الاول	2	22	22	2
	5748	-	5744	+ 5732 + 5710 -

$$5712 - 5711 + 5710 +$$

المباقي الثاني	٢٢	٢٣	
	٥٢٤٨	٥٢٣٢	٥٢٤٠

$$S_{22}^{\lambda} + S_{22}^{\mu} - S_{22}^{\nu} =$$

الناق الثالث
--------------	----	----	----

فبعد ترتيب ذاتي الحدود بالنسبة للدرجة التنارلية للحرف α يقسم

٢٣٥ ٥ علي ٢٥ ٢ فيحدث ٣ وهو اخذ الارل من خارج التسمية

ثم يرضى بالمقسم عليه في ٥٧ ونظر الحاصل من المقسوم بتغير علامات

كل من الخواصل الجزئية ووضع الحاصل المذكور تحت الحدود المشابهة

المحدوده من المقسوم واختصار الحدود المتشابهة فيحدث باق هو

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

— ١٠٧ — من هذا الباقي علي ٥٠ فيجذب — ٢٣ وهو الحد الثاني

من خارج القسمة ثم يجرى العمل على هذا السؤال

هذا واختصار العمل يكون بضرب كل حد من خارج التسمية في المتسوم

عليه وطرحه مع اختصار الحدود المتشابهة الموجودة فيه وصورة العمل

مکدا

$$\begin{array}{ccccccc} 57 & - & 572 & + & 20 & 572A & - & 5722 & + & 5710 & - & 571A & + & 250 \\ \hline \Gamma & & \Gamma & & \Gamma & \Gamma & & \Gamma \Gamma & & \Gamma \Gamma & & \Gamma & & \Gamma \end{array}$$

الباقي الاول - ٥١٠ + ٥٣٣ + ٥٤٤ - ٥٤٨ - ٥٧ | ٥٧٢ + ٥٨٠

الباقى الثانى + ٥٢٠ + ٥٢٢ - ٥٢٨

فبعد استخراج 27^2 أعنى الحد الاول من خارج القسمة بضرب 27^2 في 26^2 فيحدث 27^2 وطرحه يجعل 235 وحاصل ضرب 27^2 في 27^2 يجعل عنه 228 وطرحه يجعل 228 وهو حد ينبغي اختصاره مع 18 فيصير 10 ثم يجرى العمل على هذا الاسلوب
(تنبيهان).

الاول متى كان باقى عملية القسمة غير صفر كل خارج القسمة ~~بـ~~ كسر بسطه الباقي المذكور ومقامه المقسوم عليه

الثاني تقسيم ذات الحدود على مثلها غير ممكن متى كان الحد الاول من المقسوم غير قابل للقسمة على الحد الاول من المقسوم عليه او كان الحدان الاخيران منهما كذلك او كان الحد الاول من اى باقى لا يقبل القسمة على الحد الاول من المقسوم عليه او كان المقسوم والمقسوم عليه مرتين بالنسبة للدرجات التساوية لحرف كالحرف $س$ وكان حاصل جمع أسى هذا الحرف في الحد الاخير من المقسوم عليه وخارج القسمة أصغر من أسه في الحد الاخير من المقسوم لانه اذا اجريت عملية القسمة وانتهت بدون باقى فالحد الاخير من المقسوم يكون مساويا لحاصل ضرب الحد الاخير من المقسوم عليه في الحد الاخير من خارج القسمة فاذن يكون أس $س$ في الحد الاخير من المقسوم مساويا لحاصل جمع أسى هذا الحرف في الحدين الاخيرين من المقسوم عليه وخارج القسمة وهذا مناقص لما فرضناه من أن حاصل جمع أسى الحدين الاخيرين من المقسوم عليه وخارج القسمة اصغر من أس الحد الاخير من المقسوم مع أن أس $س$ يجب أن يكون دائما متاقتا في خارج القسمة

وكذلك لا تكون القسمة ممكنة متى كانت ذات الحدود مرتين بحسب الدرجات المتساوية لحرف كالحرف المذكور وكان حاصل جمع أسى هذا الحرف في الحد الاخير من المقسوم عليه وخارج القسمة اكبر من أسه في الحد الاخير من المقسوم

٣٢ ٤٢ ٥٢
١٧٥ — ١٧٨ — ١٧٩

فيكون وضعها على إحدى هاتين الصورتين

$$\begin{array}{l|l} r & r \\ s & s_0 + \\ & r \\ & s_A - \\ & s_r - \end{array} \quad \text{if } \begin{array}{l} r \\ s \end{array} (s_r - s_A - s_0)$$

التي يدل وضع γ فيها على أنه مضروب في الجلية $\delta^2 - \delta - \delta^3$ -
معتبرة مكررا الحرف الترتيب γ ولا نجري في أعمال التقسيم الآتية الأعلى
الصورة الثانية فإذا اردت تقسيم $\delta^2 + \delta^3 + \delta^4 + \delta^5 + \delta^6$ على
على $\delta^2 + \delta^3$ فالمكررات $\delta^2 + \delta^3 + \delta^4 + \delta^5 + \delta^6$ تدل على
كميات ذات حدود بحيث أن الاس الاعظم للعرف δ^6 في المقسوم δ^6
واسه في المقسوم عليه وأحديكون اسه في خارج القسمة δ^3 وحيث أن أصغر
أس للعرف δ^2 في المقسوم والمقسوم عليه صفر يكون في خارج القسمة
صفر ايضا ويكون الخارج بهذه الصورة $\delta^2 + \delta^3 + \delta^4 + \delta^5 + \delta^6$
فعل ذلك لا يلزم لمعرفة خارج القسمة الاتعيين المكررات $\delta^2 + \delta^3 + \delta^4 + \delta^5 + \delta^6$
وصورة العمل هكذا

$$\begin{array}{r|l} \text{أُسْرَ + مَسْرَ + دُوسْرَ + دُومَرِ + أَمْسَرِ} & \\ \hline \text{أُسْرَ + مَسْرَ + دُومَرِ + دُوسْرَ + أَمْسَرِ} & \text{أُسْرَ + مَسْرَ + دُومَرِ + دُوسْرَ + أَمْسَرِ} \\ \text{+ الخ} & \end{array}$$

فالتعيين المذكور أوجب التبيين على أنه إذا ضرب المقسوم عليه في خارج القسمة فالحاصل الجزئى الناتج من ضرب أمه في أسره لا يختص به محدودا آخر من الكللى لأنه يحتوى على أسه بدرجة اعلا من درجته

وهذا الحد ينحاح مع اول حد من المقسوم وحيث أن حاصل ضرب الباقي من المقسوم عليه في ٢٠ يقبل الاختصار مع الجزء التالي من المقسوم

$$\begin{array}{r} 20 - \\ 27 + \\ 9 - \end{array}$$

وحيث ان الجزء التالي من خارج القسمة يجب أن يكون محتويا على ٢٠ فلتعين مكرره بقسم ٢٠ ÷ ٢٧ = ٠ على ٢٧ = ٠ على ٢٧ = ٠ (وهذه هي ثاني قسمة حربية) ثم يجرى العمل على هذا الموال

(٢٢) وهناك حالة شهيرة في التقسيم الجبري وهي الحالة التي يكون فيها المقسوم عليه غير محتوي على حرف الترتيب للمقسوم كما اذا اريد تقسيم الكمية ذات الحدود $أ م + م م + م م + م م$ على $م$ فالمكررات $أ$ و $م$ و $م$ و $م$ يمكن أن تكون كميات ذات حدود وحيث أن $م$ لا يحتوي على الحرف $م$ يكون خارج القسمة محتويا على حرف الترتيب بدرجة الكاثرين في المقسوم وبناء عليه يكون هذه الصورة $أ م + م م + م م + م م$ فاذن لا يحتاج الاتعين المكررات $أ$ و $م$ و $م$ و $م$ فحواصل ضرب المقسوم عليه في حدود خارج القسمة تكون $م أ م + م م + م م + م م$ وهي حواصل لا يقل بعضها الاختصار مع الآخر لانها محتوية على $م$ باسس مختلفة فتكون حينئذ مساوية للجزاء المقابلة لها من المقسوم كل لتظيره فيحدث حينئذ يحذف المضارب المشتركة $م$ و $م$ الحان

$$\begin{array}{l} أ م = أ \\ م م = م \text{ وينتج من ذلك} \\ م م = م \\ م م = م \end{array}$$

فحينئذ يقال متى كان المقسوم عليه خاليا من حرف ترتيب المقسوم يلزم لامكان

ينج $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ (٢٩) وهذا هو المسمى بوضع $\frac{1}{2}$ مضروباً
مشتركا

وإذا اريد جعل $\frac{1}{2}$ مضروباً مشتركاً في المقدار $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ - $\frac{1}{5}$

$$- \frac{1}{2} \text{ يحدث } \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = 0$$

(٢٤) فاصل الكميتين المرفوعتين الى قوة واحدة يقبل القسمة على الفرق بينهما غير مرفوعتين لانه اذا لم يبتقسيم $\frac{1}{2}$ على $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ بان وصفت صورة العمل هكذا

$$\begin{array}{r|l} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \end{array}$$

نجم $\frac{1}{2}$ وهو اول حد من خارج القسمة وكان الباقي الاول $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ وحيث أن المقسوم يساوى المقسوم عليه مضروباً في خارج القسمة زائداً الباقي يحدث

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

وإذا وضع $\frac{1}{2}$ مضروباً مشتركاً في الحدين الآخرين $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ و

$$\text{حدث } \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

ومن المعلوم أن $\frac{1}{2}$ حاصل جمع الجزئين $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ و

و $\frac{1}{2}$ (٢٥) ليكن الجزء الاول وهو $\frac{1}{3}$ قابل

للقسمة على $\frac{1}{4}$ و فإذا كان الجزء الثاني $\frac{1}{4}$ قابلاً

للقسمة على $\frac{1}{2}$ و كان حاصل جمعهما $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ كذلك لكن الجزء

الثاني و $\frac{1}{2}$ (٢٦) حاصل ضرب مركب من مضروبين فيكني لجعل

٢-٢ ويكون الحد الثاني من خارج القسمة $(ج + ح)$ $٢-٢$
والحد الاول من الباقي التالى له هو $(ج + ح + ج + ك)$ $٢-٢$ وهذه
الكيفية تدام العملية
حتى توصل الى باقى هذه الاول لا يحتوى الاعلى $٢-٢$ باس مساو للواحد
كان لهذا الحد الاول من هذا الباقي مكرر بهذه الصورة

$١-٢$ $٢-٢$ $٢-٢$
 $ج + ح + ج + ك + ...$ والحد التالى لخارج القسمة يكون
 $١-٢$ $٢-٢$ $٢-٢$
 $ج + ح + ج + ك + ...$ وبناء عليه يكون الباقي التالى لهذا الحد هو
 $١-٢$ $٢-٢$ $٢-٢$
 $ج + ح + ج + ك + ...$

وهو باقى لا يخالف الكمية ذات الحدود المعروضة ابوضع $ج$ فيه
يدل $٢-٢$ فاذا اعتبر فرض الاول المتقدم اى فرض $٢-٢ = ج$ الذى
يه تول الكمية الى صفري يكون الباقي وهو $ج + ح + ك + ...$
 $١-٢$ $٢-٢$ $٢-٢$
 $ج + ح + ج + ك + ...$ مساويا للصفر ويكون التقسيم ممكنا

• (فى الكسور) •

(٢٧) الكسر الجبرى يدل كفاى الحساب على خارج قسمة البسط على
المقام فعلى هذا يكون كسر $ج$ - د الاعلى خارج قسمة $ج$ على $د$
والبراهين التى اجريت فى علم الحساب لبيان القواعد المساوكة فى العمليات
المتعددة للكسور ناتجة من التعريف السابق أو من تعريف يكون هذا
التعريف نتيجة له

وقد فرض فى هذه البراهين أن الخدين $ج$ و $د$ عددان صحيحان لكن هذان
الحدان قد يكونان فى علم الجبر كسرين فاذن يجب علينا أن نبين جميع القواعد
المتعلقة بالكسور فقول

الاولى اذا ضرب بسط كسرى بكية ما أو قسم عليها كان ذلك الكسر

مضروباً في هذه الكمية أو مقسوماً عليها فإذا فرض $\frac{2}{3}$ مثلاً كسراً معلوماً
ورمز له بالحرف $ك$ وضرب بسطه في ٥ كان ذلك الكسر مضروباً في ٥ لانه
ينتج من $\frac{2}{3} = ك$ أن $ك = \frac{2}{3}$ فإذا ضرب طرفاه هذه المتساوية
في ٥ يحدث $ك \times ٥ = ٥ \times \frac{2}{3}$ ومنها ينتج $\frac{٥}{3} = ٥ \times ك$ $٥ \times \frac{2}{3} = ٥ \times ك$
ومثل هذا يقال في $\frac{٥}{3} = ك : ٥$

الثانية إذا ضرب مقام كسر في كمية واحدة أو قسم عليها كان ذلك الكسر
مقسوماً على هذه الكمية أو مضروباً فيها وعلى هذا ينهن عثل ما تقدم
الثالثة إذا ضرب حد الكسر في كمية واحدة أو قسمها عليها فقيمة الكسر
لا تتغير ويعلم من ذلك أنه يمكن اختصار كسر بتقسيم حديه على مضروب
مشترك احتوا عليه حينئذ

$$\frac{\frac{٢}{٣}}{\frac{٤}{٥}} = \frac{\frac{٢ \times ٥}{٣ \times ٥}}{\frac{٤ \times ٥}{٥ \times ٨}}$$

ويعلم من ذلك أن القاعدة المستعملة في الحساب لتحويل كسور الى ذات
مقام واحد يمكن استعمالها في الجبر فإذا اريد مثلاً تحويل الكسور
 $\frac{2}{3}$ و $\frac{٥}{٥}$ و $\frac{٢}{٥}$ الى ذات مقام واحد كان الساتح المطلوب بعد اجراء
العملية $\frac{٢}{٥}$ و $\frac{٥}{٥}$ و $\frac{٢}{٥}$ وإذا اريد تحويل الكسور
 $\frac{٢}{٥}$ و $\frac{٥}{٥}$ و $\frac{٢}{٥}$ الى ذات مقام واحد يقال حيث وجد
للمقامات مضارب مشترك تحتصر القاعدة العمومية بأن يبحث كفاً في
الحساب عن المصاعف الأصغر المشترك للمقامات الثلاثة فيحل أولاً كل من
المقامات الى مضارب أولية فيحدث

$$\frac{٤}{٥} \times \frac{٥}{٥} \times \frac{٢}{٥} = \frac{٤ \times ٥ \times ٢}{٥ \times ٥ \times ٥} = \frac{٤ \times ٥ \times ٢}{٥ \times ٥ \times ٥} = \frac{٤ \times ٥ \times ٢}{٥ \times ٥ \times ٥} = \frac{٤ \times ٥ \times ٢}{٥ \times ٥ \times ٥}$$

وهذا الحاصل هو المقام المشترك البسيط الذي يمكن اعطاؤه الكسور
المفروضة فلم ينضرب احدى كل كسر من الكسور المتقدمة في خارج
قسمة $٢ \times ٢ \times ٣ \times ٥ \times ٧ \times ١١$ على مقامه فاذن يضرب حد الكسر
الاول في $٥ \times ٧ \times ١١$ والثاني في ٤×١١ والثالث في ٦×١١ فيحدث

$$\frac{٥ \times ٧ \times ١١}{٤ \times ٦} \text{ و } \frac{٤ \times ١١}{٤ \times ٦} \text{ و } \frac{٦ \times ١١}{٤ \times ٦}$$

الرابعة لطرح كسرين أو بوجه كسور ذات مقام مشترك أو بجمعهما
تجرى عملية الطرح أو الجمع على البسوط ثم يعطى للناتج المقام المشترك
لأنه إذا أجرى العمل على الكسور $\frac{٢}{٣} + \frac{٢}{٣} - \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣}$ مثلاً وفرض أن
الناتج المطلوب سه كان $\frac{٢}{٣} + \frac{٢}{٣} - \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣}$ سه فيحدث
كل من الطرفين في م فيحدث

$$٢ + ٢ - ٢ = م \text{ سه وينتج من ذلك}$$

$$٢ = م \text{ سه}$$

فاذا كانت مقامات الكسور المفروضة غير متحدة ابتدئ بتحويلها الى ذات
مقام واحد ثم يجرى عليها ما في القاعدة المتقدمة

الخامسة لضرب كسر في آخر يضرب بسط أحدهما في بسط الآخر ومقامه
في مقامه ويجعل الحاصل الثاني مقاما للعاصل الاول فاذا اريد ضرب
 $\frac{٢}{٣}$ في $\frac{٢}{٣}$ مثلاً فنحضر أن ح رمز للكسر الاول و ك رمز للثنائي
يوجد $٢ = ٣ ح و ٢ = ٣ ك$ فاذن يكون

$$٢ \times ٢ = ٣ ح \times ٣ ك \text{ أو } ٢ = ٣ ح و ٢ = ٣ ك$$

$$\frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣} \text{ أو } \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣}$$

وينتج من ذلك انه لضرب صحيح في كسر يضرب الصحيح في بسط الكسر ثم يعمل
مقام الكسر المفروض مقاما لذلك الحاصل

السادسة لتقسيم كسر على كسر يضرب الكسر الذي هو عبارة عن المقسوم

في الكبير الذي هو عبارة عن المقسوم عليه مقلوبا فإذا فرض أن $\frac{2}{3}$ مقبوم على $\frac{2}{3}$ فجعل $\frac{2}{3} = 2$ و $\frac{2}{3} = 2$ كـ يكون $2 = 2$ و $2 = 2$ ومنها يحدث .
 $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ أو $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ أو $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ أو $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$: $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ و $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$
 وبمثل ذلك يبرهن على تقسيم الصحيح على كسر فيضرب الصحيح في الكسر مقلوبا .

(في الأساس السالبة)

(٢٨) متى وجد حرف من المقسوم أسه أقل من أسه في المقسوم عليه كانت القسمة مستحيلة تقسمة 2^3 على 2^0 مستحيلة لكنهم اتفقوا على تبسيط حارج القسمة بكتابة حرف 2 بأس مساو للماضل $2 - 2 = 0$ أي $2 = \frac{2}{2}$ فاذن يكون $\frac{2}{2} = 1$ ويتضح من ذلك أنه إذا وجد حرف ذو أس سالب كان ناتجها من عملية قسمة مستحيلة .

(٢٩) الحرف ذو الأس السالب يساوي واحدا مقسوما على هذا الحرف بأسه موجبا فإذا قسم 2^2 على 2^{2+2} نتحصل بمقتضى ما تقدم في (٢٨)

$$\frac{2^2}{2^{2+2}} = \frac{2^2}{2^4} = \frac{2^{-2}}{2^2} = \frac{1}{2^4} \quad \text{وحيث أن} \quad \frac{2^2}{2^{2+2}} = \frac{2^2}{2^4}$$

يقال إذا قسم كل من حدى هذا الكسر على 2^2 حدث $\frac{2^2}{2^{2+2}}$

$$= \frac{1}{2^2} \quad \text{ومعلوم أن} \quad 2^2 \text{ مقسوما على} \quad 2^{2+2} \text{ مساو} \quad 2^{-2} \text{ فيكون}$$

$$\frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^2}$$

(٣ :) قد برهننا سابقا في قاعدة الاسس على ضرب الحدود ذات الاسس الموجبة فقط والغرض الآن البرهنة على ان هذه القاعدة توافق الاسس السالبة فاحصل ٢ في ٢ مثلا يكون مساويا ٢ لان $٢ \times ٢ = ٢$ وبمثل هذا يبرهن على الحالات الاخر

$$\frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢} = \frac{١}{٢} \times$$

فحينئذ قاعدة الاسس الموجبة في تقسيم الحدود توافق الاسس السالبة لان هذه القاعدة ناتجة من قاعدة الضرب بيان ذلك بالامثلة أن يقال

لضرب ٢ في ٢ يقال $٢ \times ٢ = ٢$ $\frac{٢}{٢} \times \frac{٢}{٢} = \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢+٢}$

ولقسمة ٢ على ٢ يجري العمل هكذا $٢ : ٢ = \frac{٢}{٢} = \frac{١}{٢}$

ولقسمة ٢ على ٢ يجري العمل هكذا $٢ : ٢ = \frac{٢}{٢} = \frac{١}{٢}$

ولايجاد حاصل ضرب كيتين مشتملتين على حدود كسرية او خارج قسمتها على بعض تحول الكميتان الى احرين صحيحتين باستعمال الاسس السالبة من غير تغيير مكررات حدودها الرقية ثم ترتب الاسس المذكورة باعتبارها اعدادا اصغر من صفر تاخذ في الصغر كلما زادت في المقدار المطلق ثم تجري

عليها طرق الضرب أو القسمة فاذا اريد مثلا ضرب $\frac{٢}{٢} + \frac{٢}{٢} - ٢$ بوضعها هكذا

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} 2- \\ \text{---} \end{array} \frac{2}{7} + \begin{array}{r} 1- \\ \text{---} \end{array} \frac{1}{7} + \begin{array}{r} 2- \\ \text{---} \end{array} 2 - \begin{array}{r} 2- \\ \text{---} \end{array} 2 - \begin{array}{r} 2- \\ \text{---} \end{array} 2 \\ \hline \begin{array}{r} 1- \\ \text{---} \end{array} \frac{2}{7} - \begin{array}{r} 1- \\ \text{---} \end{array} \frac{1}{7} - \begin{array}{r} 2- \\ \text{---} \end{array} 2 + \begin{array}{r} 2- \\ \text{---} \end{array} 2 + \begin{array}{r} 2- \\ \text{---} \end{array} 2 \\ \hline \begin{array}{r} 2- \\ \text{---} \end{array} \frac{9}{7} - \begin{array}{r} 1- \\ \text{---} \end{array} 1 - \begin{array}{r} 2- \\ \text{---} \end{array} 1 + \begin{array}{r} 2- \\ \text{---} \end{array} 1 + \begin{array}{r} 2- \\ \text{---} \end{array} 2 - \\ \hline \begin{array}{r} 2- \\ \text{---} \end{array} \frac{7}{7} + \begin{array}{r} 2- \\ \text{---} \end{array} \frac{2}{7} + \begin{array}{r} 2- \\ \text{---} \end{array} 2 - \begin{array}{r} 2- \\ \text{---} \end{array} 2 - \begin{array}{r} 2- \\ \text{---} \end{array} 2 + \\ \hline \begin{array}{r} 2- \\ \text{---} \end{array} 2 + \begin{array}{r} 2- \\ \text{---} \end{array} \frac{22}{7} - \begin{array}{r} 1- \\ \text{---} \end{array} \frac{12}{7} - \begin{array}{r} 2- \\ \text{---} \end{array} \frac{0}{7} + \begin{array}{r} 2- \\ \text{---} \end{array} 10 + \begin{array}{r} 2- \\ \text{---} \end{array} 2 - \begin{array}{r} 2- \\ \text{---} \end{array} 2 \end{array}$$

فيشاهد أن الحاصل مرتب من نفسه وان حده الاول والاخير ليسا
مختصرين وان الاول حادث من ضرب الحدين الاولين في بعضهما والاخير
من ضرب الاخيرين في بعضهما ومثل ذلك يجري في عملية التقسيم

*** (السابع الثاني) ***

*** (فی المعادلات والمسائل التي بدرجہ اولی) ***

(٣١) الكيميتان المتساويتان اللتان لا يحتويان الاعلى اعداد معلومة
 مينة بحروف يسميان متساوية وذلك كالتساوية $\text{هـ} = \text{و} + \text{ز}$ و
 التي فيها $\text{ح} = \text{و} + \text{هـ}$ و $\text{و} = \text{و} + \text{و}$ دالة على كيات معلومة
 والمتساوية متى تتحقق بمقادير الحروف المعلومة أو المحمولة الداخلة فيها
 كائنة ما كانت تسمى متطابقة وذلك كالتطابقة

$$z - s^2 + s^2 = z - s^2 (s-s)(s+s) = z - s^2$$

والتساوية التي لا يتحقق تساويها الاعتدال شخصية للجاهل الداخلة فيها
نسي معادلة فيثاغورث $3^2 + 4^2 = 5^2$ معادلة لان تساويها
لا يتحقق بأي حصة دارفرض المجهول

كل من الكميتين المفصولتين عن بعضهما في كل متساوية بالعلامة =
تسمى طرفا لكن الكمية التي على اليمين تسمى الطرف الاول والتي على اليسار

نسمى الطرف الثاني

المعادلة الرقبة ما كانت الكميات المعلومه فيها ميبنة بارقام والحرفية ما كانت
الكميات المذكوورة فيها ميبنة بحروف فينتد $٣ م - ٥ = ٧$
معادلة رقبة و $٣ م - ٥ = ٧$ معادلة حرفية

وحل المعادلة هو البحث عن المقدار الذي اذا وضع بدل مجهولها صيرها
متطابقة ويسمى هذا المقدار بحل المعادلة

متى تحققت جملة معادلات بجملة واحدة من مقادير مجاهيلها تسمى هذه
المقادير بحل جملة هذه المعادلات فحل هذه المعادلات هو البحث عن المقادير
التي اذا وضعت بدل المجاهيل صيرتها متطابقة -

وهذه المعادلات تمتاز احداها عن الاخرى بدرجتها

واذا جعلت اساس مجاهيل كل حد من معادلة فاعظم حواصل الجمع يدل على
درجة المعادلة فينتد معادلة $٣ م - ٥ = ٧$ معادلة ذات درجة

اولى ومعادلة $٥ م - ٢ م = ٩$ معادلة ذات درجة ثانية

ومعادلة $٢ م - \frac{٤}{٩} - ٧ = ٨$ معادلة ذات

درجة ثالثة

وهذه القضية غير مطردة متى كان المجهول داخلا في المعادلة مقاما لكسر
اذ لا يحكم بدرجة المعادلة في هذه الحالة الا بعد حذف المقامات
بالطريقة الآتية

وتنبر المعادلات المجددة الدرجة عن بعضها بعدد مجاهيلها

واسهل المعادلات حلا المعادلة ذات الدرجة الاولى والمجهول الواحد

(في بيان المعادلة ذات الدرجة الاولى)

(والمجهول الواحد)

(٣٢) ولندكر بعض قواعد متعارفة فنقول

تعدل المعادلة لا يتغير

اولا اذا ضرب لكل من طرفيها كمية واحدة او طرحت من كل منهما
 وثانيا اذا ضرب كل من طرفيها في كمية واحدة او قسم كل منهما عليها
 وثالثا اذا اجعت معادلتان الى بعضهما بأن جمع الطرف الاول للاول
 والثاني للثاني او طرحتا من بعضهما او ضربتا في بعضهما او قسمتا على بعضهما
 بحيث تقرر ذلك يجب أن نستعمل بالتحويلين المهمين فنقول
 الاول كل معادلة كالمعادلة $5x - 4 = 2x + 7$ يلزم حلها أن
 يكون المجهول في الطرف الاول منها ولتحصيل ذلك يطرح من كلا طرفيها
 $2x$ فتصير $5x - 4 - 2x = 2x + 7 - 2x$ ثم يضم الى كل من طرفيها
 4 فتصير $5x - 4 + 4 = 2x + 7 + 4$ فالحد $2x$ الذي كان
 في الطرف الثاني موجبا صار في الطرف الاول سالبا و 4 الذي كان
 في الطرف الاول سالبا صار في الطرف الثاني موجبا فاذا يلزم لتحويل حد
 من طرف الى طرف تغيير علامته فقط

والثاني كل معادلة كالمعادلة $\frac{2x}{3} - \frac{4}{5} = 7 + \frac{x}{4}$ يلزم حلها ان
 تحذف المقامات ولذا تحول اولا الكسور والعدد الصحيح 7 الى دات
 مقام واحد كما عرف من القواعد المعلومة فتصير $\frac{2x}{3} - \frac{4}{5} = \frac{28}{1} + \frac{x}{4}$
 $= \frac{112}{4} + \frac{x}{4}$ ثم يضرب كل من طرفي هذه المعادلة في 30 لحذف
 المقام فتصير

$$20x - 24 = 310 + 30x$$

وقد يتوصل لهذا الناتج من اول الامر بدون كتابة المقام المشترك أي أنه
 لحذف مقامات معادلة يضرب بسط كل كسر في حاصل ضرب مقامات
 الكسور الاخر ثم يضرب الصحيح في حاصل ضرب المقامات

(تنبيه)*

هذه القاعدة تقتصر في الحالة التي يكون فيها للمقامات المعلومة مضارب
 مشتركة

فالمعادلة $\frac{2x}{9} - \frac{4}{6} = 7 + \frac{x}{4}$ المحتوية على مقامات ذات مضارب

مشاركة يسهل فيما تحويل جميع الكسور والعدد الصحيح الى ذوات مقام واحد باخذ المكرر الاصغر المشترك وهو ٣٦ مقاماً مشتركاً لجميع المقامات فاذن يكفي ضرب الصحيح في ٣٦ ثم ضرب حدى كل كسر في خارج قسمة ٣٦ على مقام هذا الكسر فيحدث بعد حذف المقام المشترك

$$٣٠ م - ٢٧ = ٨ م + ٢٥٢$$

فحينئذ يلزم لحذف مقامات معادلة ذات مضارب مشتركة أن يبحث عن المكرر المشترك الاصغر لهذه المقامات ويضرب العدد الصحيح فيه ثم يضرب بسط كل كسر في خارج قسمة المكرر المذكور على مقام هذا الكسر (٣٣) لتطبيق هذه القاعدة على حل المعادلة

$$\frac{٢ م}{٤} + ٤ = \frac{١}{١٠} - \frac{٧(٣ م - ٢)}{١٥}$$

تجرى عملية الضرب المبينة في بسط الكسر الاول فيتحصل

$$\frac{٢ م}{٤} + ٤ = \frac{١}{١٠} - \frac{٢١ م - ١٤}{١٥}$$

ثم تحذف المقامات علا حظة العدد ٦٠ مكرراً مشتركاً أصغر للأعداد ١٥ و ١٠ و ٤ فيحدث

$$٥٦ م - ٨٤ = ٦ - ٢٤٠ + ٤٥ م$$

ثم تحول الحدود المجهولة الى الطرف الاول والحدود المعروفة الى الثانى فتصير المعادلة

$$٥٦ م - ٤٥ م = ٨٤ - ٦ + ٢٤٠$$

وبعد الاختصار تصير

$$١١ م = ٣٢٠$$

١١ م = ٣٢٠ أى م = ٣٠ ولتحقيق هذا المقدار يوضع

العدد ٣٠ في المعادلة $\frac{٢ م}{٤} + ٤ = \frac{١}{١٠} - \frac{٧(٣ م - ٢)}{١٥}$ بدل

٣٠ فتصير $\frac{٢(٣٠)}{٤} + ٤ = \frac{١}{١٠} - \frac{٧(٣٠ - ٢)}{١٥}$ ومنها يستنتج

* (21) *

$$5 \frac{20}{r} + 2 = \frac{1}{r} - \frac{2\sqrt{2}}{10}$$

$$5 \frac{20}{7} + 1 = \frac{1}{1} = \frac{133}{0}$$

$$r_1^2 + r_2^2 = 1 - r_3^2$$

$$r_{70} = r_{70}$$

وحيث غير المجهول s في المعادلة المقروضة بالتقدير ٣٠ فصار
متطابقة تكون العدد ٣٠. هو حل هذه المعادلة وحل المعادلة

$$\frac{2}{3} - \frac{(2-2)^2}{3} - \frac{(2-2)^2}{3} = 1 - \frac{2}{3}$$

المبين فيها وتحذف المقامات بملاحظة أن $12 \times 2 = 24$ هو المضروب المشترك الأصغر لجميع المقامات فيجث

$$\begin{array}{ccccccc} 22 & & 22 & 0 & & 22 & & 22 & & 22 & & 2 \\ -78 & - & -73 & + & 71 & - & -71 & - & -72 & = & -712 & - & -72 \end{array}$$

أوفىحدث بعد ترك حدى - $\frac{1}{2} \times 6$ و $\frac{1}{2} \times 6$ المتاحيان
وتحويل المجاهيل الى الطرف الاول والمعاليم الى الثانى

$$x^2 \quad 0 \quad x^2 \quad x \quad x$$

$$-x^2 - x^2 - x^2 \quad x^2 = -x^2 - x^2 - x^2$$

ثم يوضع منه مضروباً مشتركاً في الطرف الاول وتختصر الحدود المتشابهة

وهي $+ 12$ و $- 78$ الموجودة في الطرف الثاني فيحدث

$(-72 - 2) = 74$ م = $74 - 2 = 72$ وبقسمه طرفها علی فکر

پیر محدث

$$\frac{27 - 22}{2} = \frac{5}{2}$$

ويمكن اختصار مقدار مـ بوضع ٢ مـ مضروباً مشتركاً في البسط و مـ مضروباً مشتركاً في المقام فيصير

* (11) *

$$\frac{22}{-} = \frac{(23-22) \cdot 22}{(23-22) \cdot -} = \frac{22}{-}$$

ولتحقيق هذا المقدار يغير المجهول من في المعادلة المقروضة بمقداره وهو

$\frac{22}{-}$ وبهذا التغير يعلم هل المعادلة متطابقة أم لا

(قاعدة عمومية)

لحل معادلة ذات درجة أولى ومجهول واحد يتم

أولاً إجراء عملية الضرب الكائن فيها ان وجدت ثم حذف المقامات

وثانياً تحويل الحدود المشتملة على الجاهيل الى الطرف الاول والحدود

المعلومة الى الطرف الثاني

وثالثاً اختصار الحدود المجهولة لتصبح حداً واحداً ان كانت المعادلة رقية

وجعل المجهول مضروباً مشتركاً ان كانت المعادلة حرفية

ورابعاً تقسيم طرفها الثاني على المكرر الرقي أو الحرفي للمجهول فنخرج

القسمة يكون مقدار المجهول المذكور

(٣٤) يمكن تغيير علامات معادلة بدون أن يتغير التساوى الواقع بين

طرفيها لأنه لو فرضت معادلة $٥ - ٣ = ٢$ وحولت

جميع حدود الطرف الاول الى الثاني وحدود الثاني الى الاول لصارت

$٣ - ٥ = ٢ - ٥$ وبمعكس الطرفين يحدث

$٥ - ٣ = ٢ - ٥$ وهي لا تخالف المعادلة الاولى

الابتعير علامات جميع حدودها

(في المعادلات ذات الدرجة الاولى ويجله الجاهيل)

(٣٥) كل معادلة ذات مجهولين لها حلول غير منتهية العدد لانه اذا فرض

لاحدا المجهولين مة دارا اختيارى حدث للمجهول الآخر مقدار مطابق له

فادافرضت معادلة $٣ - ٢ = ٥$ وجعل فيها $٣ = ١$

حدث $٢ = ٥ - ٣ = ٢$ فاذن يكون مقدار $٢ = ٢$ ومقدار

صه = ١ حلال المعادلة وكل ما فرض للمجهول صه مقدار ما وجد للمجهول صه مقدار جديد فيكون للمعادلة المفروضة حلول غير منتهية العدد

(٣٦) ولتشتعل الآن بحل معادلتين ذاتي مجهولين بطرق أربع فنقول الطريقة الاولى طريقة الوضع وهي حذف المجهول بوضع مقداره المستخرج من المعادلة الاولى في الثانية فإذا فرضت معادلتان

$$٣ صه + ٤ صه = ١٠$$

$$٥ صه - ٧ صه = ٣$$

واريد حذف احدها المجهولين منهما يستخرج من احدهما مقداره بفرض الآخر معلوما فإذا استخرج مقدار صه من الاولى بفرض صه معلوما حدث $\frac{٣-١}{٤} = صه$ وبوضع هذا المقدار في المعادلة الثانية تصير محتوية على مجهول واحد هكذا

$$٥ صه - \frac{٧(٣-١)}{٤} = ٣$$

فالقاعدة العمومية لحذف مجهول من معادلتين بطريقة الوضع أن يستخرج من احدهما مقدار احدها المجهولين بفرض الآخر معلوما ثم يعبر هذا المجهول بمقداره في المعادلة الثانية

الطريقة الثانية طريقة التساوي والمقارنة وهي حذف احدها المجهولين من المعادلتين باستخراج مقداره من كل منهما وتسوية هذين المقدارين ببعضهما فإذا اريد حذف احدها المجهولين صه من المعادلتين المذكورتين يستخرج مقداره من كل منهما بفرض المجهول الآخر معلوما فيحدث من احدهما صه $= \frac{٣-١}{٤}$ ومن الاخرى صه $= \frac{٣-٥}{٧}$

وبتساوي هذين المقدارين تحدث معادلة ذات مجهول واحد هكذا

$$\frac{٣-١}{٤} = \frac{٣-٥}{٧}$$

فالقاعدة العمومية لحذف مجهول من معادلتين ذاتي مجهولين بواسطة طريقة التساوي أن يستخرج من كل منهما مقدراً أحدها المجهولين بفرض الآخر معلوما ثم يسوى هذان المقداران ببعضهما

الطريقة الثالثة طريقة الحذف بواسطة الجمع أو الطرح
فإذا فرض أن المطلوب حذف المجهول من المعادلتين

$$٥س - ٢ص = ٩ \quad \text{و}$$

$$٢س + ٢ص = ١٢$$

وحسب التنبيه على أن $ص$ له مكرر متحد في المعادلتين المذكوكتين
ذو علامتين متخالفتين فلحذفه يكفي جمع هاتين المعادلتين إلى بعضهما طرفاً إلى
طرف وبهذا تحدث معادلة محتوية على مجهول واحد هكذا

$$٥س + ٢س = ٢ص + ٩ + ١٢$$

وإذا فرض أن المطلوب حذف المجهول $ص$ من المعادلتين

$$٣س + ٤ص = ١٠ \quad \text{و} \quad ٥س - ٧ص = ٢$$

وجب أولاً أن يجعل مكرر $ص$ فيهما واحداً بضرب طرفي المعادلة الأولى
في ٧ مكرر $ص$ من المعادلة الثانية وهو ٧ ثم ضرب طرفي المعادلة
الثانية في مكرر $ص$ من الأولى وهو ٤ فيحدث

$$٢١س + ٢٨ص = ٧٠ \quad \text{و}$$

$$٢٠س - ٢٨ص = ١٢$$

فإذا جمعت هاتان المعادلتان إلى بعضهما حدثت معادلة ذات مجهول واحد

$$٢١س + ٢٠س = ٧٠ + ١٢ \quad \text{هكذا}$$

وإذا اتحدت علامة المجهول $ص$ في كل من المعادلتين أجرى طرح

المعادلتين من بعضهما طرفاً من طرف عوض جمعهما

فالقاعدة العمومية لحذف مجهول من معادلتين ذاتي مجهولين بطريقة
الجمع أو الطرح أن يجعل مكرراً للمجهول المراد حذفه من كل من المعادلتين
واحداً وطريق الوصول إلى ذلك أن يضرب طرفاً المعادلة الأولى في مكرر

هذا المجهول من الثانية ثم يضرب طرفاً الثانية في مكرر للمجهول المذكور

من الأولى ثم يجمع المعادلتان على بعضهما أو تطرح احدهما من الأخرى

بحسب اختلاف واتحاد علامته في كل من المعادلتين المفروضتين

(٤٥)

(تنبيه)

الفرص من ضرب طرفي كل من المعادلتين في مكرر المجهول المراد حذفه
تصير المعادلتين محتويتين على هذا المجهول بمكرر واحد ويمكن الوصول
الى ذلك بطريقة مختصرة عندما يكون لمكرري هذا المجهول مضروب مشترك
فاذا فرض أن المراد حذفه من المعادلتين

$$٥ م + ٦ ص = ٢٨ \text{ و}$$

$$٧ م + ٨ ص = ٢٨$$

فالمكرران ٦ و ٨ حيث أن لهما مضربا مشتركا يبحث عن المقسوم
الاصغر لهما فيوجد ٢٤ وبحيث يسهل تحويل المعادلتين لتصيرا
محتويتين على المجهول ص م بمكرر ٢٤ بضرب طرفي المعادلة الاولى
في ٤ الذي هو خارج قسمة ٢٤ على ٦ ثم ضرب طرفي المعادلة
الثانية في ٣ الذي هو خارج قسمة ٢٤ على ٨ فيحدث

$$٢٠ م + ٢٤ ص = ١١٢ \text{ و}$$

$$٢١ م + ٢٤ ص = ١١٤$$

وهذه الكيفية المختصرة هي المشاهدة في علم الحساب في كيفية تحويل الكسور
الى كسور اخضر مقامها مشتركا

فالقاعدة التي يراد ساو كها هنا عين التي هناك

الطريقة الرابعة طريقة المكررات غير المعينة

فاذا فرضت معادلتان $٥ م + ٦ ص = ٢٨$ و $٧ م + ٨ ص = ٢٨$
 $= ٣٨$ تضرب حدود المعادلة الاولى في م ثم تجمع الثانية اليها طرفا الى
طرف فيحدث

$$٥ م + ٧ م + ٦ ص + ٨ ص = ٢٨ + ٣٨$$

ثم يوضع م م و م مضروبين مشتركين في الحدود المشتركة عليهما
فيتحصل

$$(٥ + ٧) م + (٦ + ٨) ص = ٢٨ + ٣٨$$

(١٢)

وانما نعين كمية م لاجل حذف احد المجهولين فاذا اريد حذف صه
مثلا يسوى مكرره بصفر هكذا

$٢٦ م + ٨ = ٠$ ومنه يستخرج م $= -٨ = -\frac{٨}{٢٦} = -\frac{٤}{١٣}$ ثم
تستعوض كيتا م و $٢٦ م + ٨$ في معادلة $(٧ + ٥ م) =$ صه
 $+ (٢٦ م + ٨) =$ صه $= ٢٨ م + ٢٨$ بالمقدارين $-\frac{٤}{١٣}$ وصفر
وبهذا نؤول الى $(٧ + \frac{٢٠}{١٣}) =$ صه $= -\frac{١١٢}{١٣} + ٢٨$
فاذن يكون المجهول صه قد اُحذف

فالقاعدة العمومية لحذف مجهول من معادلتين بطريقة المكررات غير
المعينة ان تضرب احدى المعادلتين في كمية ما غير معينة ثم يجمع الناتج الى
المعادلة الاخرى طرفا الى طرف ثم يوضع كل مجهول مضروبا مشتركا
في الحدود المشتبهة عليه ثم يسوى مكررا المجهول المراد حذفه بصفر
فيصير محدوفا ثم تستعوض الكمية غير المعينة بمقدارها المستخرج من القوس
المتقدم

(تنبيه)

اسهل الطرق الاربعة في العمل طريقة الجمع أو الطرح لانها لا تحدث مقاما
في المعادلة الناتجة من الحذف غير أن طريقة الوضع تستعمل بكثرة عند
ما يكون مكررا المجهول المراد حذفه مساويا للواحد في احدى المعادلتين
ذاتي المجهولين

(٣٧) حل معادلتين ذاتي مجهولين و درجة اولى كمعادلتين
 $٧ م - ٨ = ٥$ و $٥ م - ١٢ =$ صه $= ٩$ يحذف المجهول
صه بضرب المعادلة الاولى في ٣ والثانية في ٢ ثم تطرح الثانية
من الاولى فيحصل

$$١١ م = ٣٣ \text{ ومنها يستخرج } م = \frac{٣٣}{١١} = ٣$$

ولا استخراج مقدار المجهول صه يوضع مقدار المجهول م بدله
في احدى المعادلتين فيوضع في الاولى مثلا مقدار م بدله فتصير

$$٢١ - ٨ ص = ٥ = ٥ ص \text{ ومنها يحدث ص} = \frac{٥-٢١}{٨} = ٠,٢$$

فالقاعدة العمومية لحل معادلتين ذاتي مجهولين ودرجة اولى أن يحذف
احد المجهولين منهما فتتبقى معادلة ذات مجهول واحد يستخرج منها مقدار
هذا المجهول ثم يوضع مقداره بدله في احدى المعادلتين فتؤول الى معادلة
محتوية على المجهول الثاني ثم يستخرج منها مقداره

(٣٨) وبمقتضى ما ذكر يسهل حل ثلاث معادلات كل منها ذات ثلاثة
مجاهيل فاذا فرض مثلا

$$٥ ص - ٨ ص = ١٩ - ٤ ع$$

$$٢ ص + ٢ ص = ٩ - ٤ ع$$

$$٧ ص - ٢ ص = ٤ ع - ٧$$

يحذف ع من المعادلة الاولى والثانية بضرب الاولى في ٢ ثم ضم الناتج
الى الثانية فيحدث

$$(١) \quad ١٢ ص - ١٣ ص = ٢٩ - ٢٩$$

ثم يحذف ع من المعادلة الثانية والثالثة بضرب الثالثة في ٣ ثم طرح
الثانية من الحاصل فيحدث

$$(٢) \quad ١٩ ص - ٩ ص = ١٢$$

ثم يحذف المجهول ص من المعادلتين (١) و (٢) ذاتي الدرجة الاولى
والمجهولين بأن تضرب الاولى في ٩ والثانية في ١٣ ثم تطرح الاولى
من الثانية فيحدث

$$١٣٩ ص = ٤١٧ \text{ ومنها يحدث ص} = \frac{٤١٧}{١٣٩} = ٣$$

ثم يستخرج مقدار المجهول ص بوضع مقدار ص عوضا عنه في احدى
المعادلتين (١) و (٢) فيحدث

$$٢٦ - ١٢ ص = ٢٩ \text{ ومنها ينتج}$$

$$ص = \frac{٢٦+٢٩}{١٣} = ٥$$

ثم لاستخراج مقدار ع يوضع في احدى المعادلات الثلاث المشتملة كل منها

على الثلاثة مجاهيل مقدار المجهول x ومقدار المجهول y بدل x في المعادلة المذكورة الى معادلة محتوية على المجهول z فقط فاذا وضع مثلا بدل x و y مقدارهما في المعادلة الثالثة آتت الى $21 - 10 - 2 = z$ ومنها يحدث $z = 9$ $\frac{7-10-21}{4} = 9$ فالقاعدة العمومية لحل ثلاث معادلات كلاها ذات ثلاثة مجاهيل ودرجة اولى ان يحذف احد المجاهيل من احدى المعادلات مع كل من المعادلتين الاخرتين على التوالي فيتوصل الى معادلتين كلاهما ذات مجهولين ثم يحذف المجهول الثاني من هاتين المعادلتين فتحصل معادلة ذات مجهول واحد فيستخرج مقداره منها ويوضع في احدى المعادلتين ذاتي المجهولين ثم يستخرج مقدار المجهول الثاني ثم يوضع مقدارا هذين المجهولين المستخرجين في احدى المعادلات ذوات الثلاثة مجاهيل ثم يستخرج مقدار المجهول الثالث منها (٣٩) فبناء على هذه القاعدة يمكن التوصل الى القاعدة التي بها تحل اربع معادلات كلاها ذات اربعة مجاهيل وخمس معادلات كلاها ذات خمسة مجاهيل وهكذا لان العمل واحد فاذا نيت قاعدة عمومية بذكرها فنقول

(قاعدة عمومية)

لحل جملة معادلات عددها m محتوية على مجاهيل عددها n ثم ايضا يحذف احد المجاهيل من المعادلة الاولى مع كل من المعادلات الاخر التي عددها $m - 1$ على التوالي فتنتج جملة معادلات عددها $m - 1$ وهو عين عدد مجاهيلها ثم يحذف مجهول ثان من احدى المعادلات التي عددها $m - 1$ مع كل من المعادلات التي عددها $m - 2$ على التوالي فتنتج جملة معادلات عددها $m - 2$ وهو عين عدد مجاهيلها وهكذا يكون العمل الى أن يتوصل الى معادلة ذات مجهول واحد فيستخرج منها مقداره ويوضع في احدى المعادلتين المحتويتين على المجهولين الناتجين من العمل لاستخراج المجهول الثاني ثم يوضع مقدرا المجهيل التي عبت في المعادلات السابقة الناتجة من العمل لاستخراج باقي المجاهيل الاخر الى أن يتوصل الى احدى المعادلات

التي عدد مجاهيلها م وهو عين عددها قمة تكون قد استخرجت مقادير الجاهيل على التوالي

(٤٠) قد فرضنا في البحث عن قاعدة حل معادلتين ذاتي مجهولين ان كتبهما بهذه الصورة $م + ص = هـ$ اعني أن كتبهما لا تحتوي الاعلى ثلاثة حدود صحيحة احدها مستعمل على م والثاني على ص والثالث على المعلوم وأن الحد المعلوم في الطرف الثاني والحدين الآخرين في الطرف الاول فاذا كانت صورة المعادلتين متشعبة وجب حينئذ تحويلها الى الصورة البسيطة المتقدمة فيجب

اولا اجراء عمليات الضرب الموجودة بها وحذف المقامات وثانيا تحويل الحدود المستعملة على المجهولين الى الطرف الاول والحدود المعلوم الى الطرف الثاني

وثالثا اختصار حدود م وحدود ص أو وضع م و ص مضروبين مشتركين في الحدود المستعملة عليهما ومثل ذلك يجري على جملة المعادلات دوات المجاهيل الثلاثة أو الاربعة أو الخمسة وهلم جرا

(٤١) قد فرضنا في المعادلات التي حلت أن جميع المجاهيل داخله في كل منها فان لم يكن جميعها داخل في كل منها سميت معادلات غير تامة وحلها كحل المعادلات التامة غيراته يجب الاتقاء في انتخاب المجاهيل التي يراد حلها ليتوصل الى معادلة ذات مجهول واحد في اقرب وقت وللوصول على ذلك يحذف المجهول الداخل في المعادلات بأقل عدد معادلات

$$م + ص = ١٠ \quad ع$$

$$م + ص = ١٢ \quad ع$$

$$م + ص = ١٩ \quad ر$$

$$م - ٤ ص = ٢ + ع$$

مثلا يشاهد أن المجهول ر داخل فيها بعدد اقل من غيره فيجب حذف هذا المجهول من هذه المعادلات بان يحذف هي المعادلتين الاخيرتين

المختوبتين عليه تحدث معادلة مجتردة منه فاذا اخذت هذه المعادلة الى المعادلتين الاوليين يحدث ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل هي

$$٢ م + ٢ ص - ع = ١٠ \quad و$$

$$٥ م - ٢ ع = ١٢ \quad و$$

$$٩ م - ١٦ ص - ع = ١١$$

وحيث أن المجهول ص داخل في هذه المعادلات بعدد اقل من غيره يحذف من المعادلة الاولى والثالثة لينتكون من حذفه معادلة مشقة على مجهولين هما المجهولان الموجودان في الثانية وبكتباها مع الثانية يحدث

$$٥ م - ٢ ع = ١٢ \quad و$$

$$٥٩ م - ٥٠ ع = ١٢٧ \quad و$$

$$فاذا حذف ع منهما يحدث ٧٣ م = ٢١٩$$

$$ومنها يحدث ٣ =$$

$$وبالوضع يحدث على التوالي ٢ = ع و ١ = ر و ٥ =$$

(٤٢) قد يكون عدد المعادلات في حل بجهة معادلات ذات درجة اولى

وبجهة مجاهيل قدر عدد المجاهيل كما تقدم في جميع جهل المعادلات التي حلت

وقد يكون عدد المعادلات اريد من عدد المجاهيل

وقد يكون عدد المجاهيل اريد من عدد المعادلات فهذه ثلاث حالات

الحالة الاولى اذا كان عدد المعادلات ذات الدرجة الاولى قدر عدد المجاهيل

الداخله فيها بان كان الاول م والثاني م كانت ممكنة الحل على

العموم ومنتهية اعني انها تحقق بجملة واحدة من مقادير المجاهيل

المختصرة فيها

لانه اذا سلكت الطريقة الميينة في (٣٩) لحل بجهة معادلات توصل الى

معادلة ذات مجهول واحد هكذا

ح م = ٤ ومنها يستخرج م = ٤ فاذا وضع هذا المقدار في احدى

المعادلتين داني المجهولين حدث مقدار المجهول الثاني المحصر في هذه

المعادلة ومثل ذلك يجرى في جميع مجاهيل الجمل الحادثة من الاوضاع المتوالية

وقد يتوصل بعد عملية الحذف على التوالي الى معادلة انتهائية هكذا
 $m \times 0 = 0$ أو $0 = 0$ وهي معادلة فاسدة تدل على أن الجملة
 المفروضة غير ممكنة الحل أعني انه لا يمكن تحقيقها بجملة المقادير المجاهيل
 المحصورة فيها وذلك انما يقع عندما تكون هذه الجملة محتوية على معادلات
 متخالفة

وقد يتوصل بعد الحذف على التوالي الى المعادلة انتهائية هكذا
 $0 \times m = 0$ أو $0 = 0$ فتكون جملة المعادلات غير معيبة الحل
 أعني انه يمكن تحقيقها بجملة لانهاية العدد من المقادير للمجاهيل المتحصرة
 فيها وانما يقع ذلك اذا كان بين بعض معادلات من الجملة تداخل به يكون
 عدد المعادلات اقل من عدد المجاهيل

الحالة الثانية اذا كان عدد المعادلات أكثر من عدد المجاهيل المتحصرة فيها
 بان كان عدد الاولى $m + 1$ وعدد الثانية m فالجملة تكون على
 العموم غير ممكنة الحل لانه اذا أخذ منها معادلات عددها m وكان
 لا يوجد الا جملة واحدة من مقادير المجاهيل المتحصرة فيها التي عددها m
 ووضعت هذه المقادير في المعادلات الباقية التي عددها 1 ولم تتطابق
 تكون الجملة المفروضة غير ممكنة التحقق

وقد يوجد تداخل بين بعض معادلات الجملة المفروضة مع كون عدد
 المعادلات المتحققة وهو m عين عدد المجاهيل الداخلة فيها فينبذ تكون
 الجملة المذكورة ممكنة الحل ومعينة فان كان عدد المعادلات المتحققة اقل من
 m أي من عدد المعادلات المفروضة فالجملة المذكورة تكون غير معينة الحل
 الحالة الثالثة اذا كانت المعادلات اقل من المجاهيل الداخلة فيها بان كان
 عدد الاولى m وعدد الثانية $m + 1$ كانت الجملة على العموم
 غير معينة الحل لانه يتوصل بعد الحذف المتوالية الى معادلة مشتتة على

بجاهيل عددها ٥ + ١ = وهذه المعادلة تتحقق بجعل لانهاية العدد
من المقادير فاذا وضع أحده هذه الجمل في إحدى المعادلتين المشتقتين على
بجاهيل عددها ٥ + ٢ يحدث مقدار مطابق للصهرول الباقي في هذه
المعادلة فاذن يكون لهذا المجهول مقادير غير معينة أيضا ومثل ذلك يشاهد
في جميع المجاهيل الاخرى اى انه يكون لها مقادير عددها لانهاى ومع ذلك
فالجملة تكون غير ممكنة الحل اذا وجد في المعادلات التى عددها م وعدد
بجاهيلها م + ٥ معادلتان أو ثلاث متخالفة
امثلة ذلك

المثال الاول أن تفرض ثلاث معادلات هكذا

$$٢م - ٢صه + ٥ع = ١٤ \quad \text{و}$$

$$٢م + صه - ٨ع = ١٠ \quad \text{و}$$

$$٦م - ٤صه + ١٠ع = ٢٧$$

ثم يحدف المجهول صه من المعادلة الاولى والثانية ثم من الاولى والثالثة
فيوجد ٧م - ١١ع = ٣٤ و ١ = ٠ فالمعادلة الفاسدة التى
هى ١ = ٠ تبين ان المعادلة الاولى والثالثة الخادثة منهما هذه المعادلة
متخالفتان ويفهم ذلك من أول وهلة لان الطرف الاول من المعادلة الثالثة
ضعيف الطرف الاول من المعادلة الاولى الذى هو ٢م - ٢صه + ٥ع
والطرف الثانى منها ليس ضعف الطرف الثانى من الاولى الذى هو ١٤
وهذا انشئ من فساد المعادلات الاصلية

المثال الثانى ان تفرض ثلاث معادلات هكذا

$$٢م - ٢صه + ٥ع = ١٤ \quad \text{و}$$

$$٢م + صه - ٨ع = ١٠ \quad \text{و}$$

$$٦م - ٤صه + ١٠ع = ٢٨$$

ثم يحدف صه من المعادلة الاولى والثانية ثم من الاولى والثالثة
فيحدث

٧ صه - ١١ ع = ٣٤ و ٠ = ٠
 فيظهر من المتطابقة ٠ = ٠ أن المعادلة الأولى والثالثة متداخلتان
 لأن المعادلة الثالثة تحدث من ضرب طرفي المعادلة الأولى في ٢ فالجمله
 المعلومة لاثنتين المعادلتين

$$\begin{aligned} ٢ صه - ١١ ع + ٥ صه &= ١٤ \quad \text{و} \\ ٢ صه - ١١ ع &= ٣٤ \end{aligned}$$

فيسخرج من المعادلة الأخيرة صه = $\frac{٣٤ + ١١ ع}{٢}$ وبوضع هذا المقدار
 في المعادلة الأولى يحدث

$$\frac{٣٤ + ١١ ع}{٢} = ١٤ \quad \text{أو} \quad \frac{٣٤ + ١١ ع}{٢} = ٣٤$$

وهذان المقداران يطابقان أى مقدار فرض للجبهول ع ومقادير
 صه و صه و ع المتطابقة تحقق المعادلات المعلومة ولذا يكون
 حل المعادلات غير معين

المثال الثالث اذا فرض

$$\begin{aligned} ٢ صه - ١١ ع + ٥ صه &= ١٤ \quad \text{و} \\ ٢ صه - ١١ ع + ١٠ صه &= ٢٨ \quad \text{و} \\ ٢ صه - ١١ ع + ١٥ صه &= ٤٢ \end{aligned}$$

ثم حذف الجبهول ع من المعادلة الأولى والثانية ثم من الأولى والثالثة
 حدث متطابقتان وهذا يدل على ان الجمله المعلومة تؤل الى معادلة واحدة
 هي ٢ صه - ١١ ع + ٥ صه = ١٤ لان المعادلة الثانية ناتجة
 من ضرب المعادلة الأولى في ٢ والثالثة من ضربها في ٣ فاذا استخرج
 مقدار صه من المعادلة ٢ صه - ١١ ع + ٥ صه = ١٤ يحدث
 صه = $\frac{١٤ + ١١ ع}{٢}$ واذا فرضت مقادير للجبهولين صه و ع
 حدث مقدار للجبهول صه وجميع هذه المقادير تحقق المعادلات
 الاصلية

المثال الرابع اذا فرض



$$٢ \text{ صه } - ٢ \text{ صه } + ٥ \text{ ع } = ١٤ \text{ و}$$

$$٢ \text{ صه } + \text{ صه } - ٨ \text{ ع } = ١٠ \text{ و}$$

$$٨ \text{ صه } - ٣ \text{ صه } + ٢ \text{ ع } = ٢٥$$

ثم حذف صه من الاولى والثانية ثم من الثانية والثالثة فحدث هاتان

$$\text{المعادلتان } ٧ \text{ صه } - ١١ \text{ ع } = ٣٤ \text{ و } ١٤ \text{ صه } - ٢٢ \text{ ع } = ٦٥$$

وهاتان المعادلتان متماثلتان فلو تداخلتا في بعضهما لحدث معادلة فأمدة

هي $٥ = ٣$ وفهم من ذلك ان المعادلات الالهلية متخالفة ايضا لان الطرف

الاول من المعادلة الثالثة ضعف الطرف الاول من الاولى مضموما اليه

الطرف الاول من المعادلة الثانية لكن الطرف الثاني من المعادلة الثالثة ليس

مساويا لضعف الطرف الثاني من المعادلة الاولى مضافا الى الطرف الثاني من

المعادلة الثانية

المثال الخامس اذا فرضنا

$$٢ \text{ صه } - ٢ \text{ صه } + ٥ \text{ ع } = ١٤ \text{ و}$$

$$٢ \text{ صه } + \text{ صه } - ٨ \text{ ع } = ١٠ \text{ و}$$

$$٨ \text{ صه } - ٣ \text{ صه } + ٢ \text{ ع } = ٢٥$$

يحدث بحذف صه منها معادلتان

$$٧ \text{ صه } - ١١ \text{ ع } = ٣٤ \text{ و } ١٤ \text{ صه } - ٢٢ \text{ ع } = ٦٥$$

وحيث أن هاتين المعادلتين متطابقتان يفهم من ذلك انه يجب استعمال

المعادلتين $٣ \text{ صه } - ٢ \text{ صه } + ٥ \text{ ع } = ١٤$ و $٧ \text{ صه } - ١١ \text{ ع } = ٣٤$

$٣٤ = ٣٤$ المشروحتين سابقا في المثال الثاني

وعدم انتهاء الجملة المعلومة حادث من كون المعادلة الثالثة مركبة من ضم

ضعف طرفي المعادلة الاولى الى طرفي المعادلة الثانية

المثال السادس اذا فرضنا

$$٢ \text{ صه } - ٢ \text{ صه } + ٥ \text{ ع } = ١٤ \text{ و}$$

$$٦ \text{ صه } - ٤ \text{ صه } - ٢ \text{ ع } = ١٥ \text{ و}$$

$$٩ \text{ صه } - ٦ \text{ صه } - ٧ \text{ ع } = ٢٠$$

حدث

حدث بحذف صه منها معادلتان $١٣ = ع$ و $٢٢ = ع$ و $٢٢ = ع$ ومنها يحدث $١ = ع$
ولايجرى العمل الاعلى هذه المعادلة وأحدى المعادلات المفروضة الآتيتين
الى المعادلتين $ع = ١$ و $٢ = صه - ع$ فاذا كان يكون الحل
غير معين نلرا الى المجاهيل $صه$ و $صه$ و $ع$ الذى ليس له الامقدار
واحد محدود

(مسائل من الدرجة الاولى)

(٤٣) حل المسئلة الجبرية يتككب من جرتين متعايرين احدهما وضع
المسئلة بصورة معادلة تدل بطريق الاختصار على الارتباطات الكاسية
بين الكميات المعلومة والمجهولة كدلالة منطوق المسئلة والثانى حل المعادلة
أو المعادلات الناتجة من الوضع المذكور

والجزء الثانى من هذين الجرتين مؤسس على قواعد مطردة تقدم ذكرها
فى الحالة التى تكون فيها المعادلات ذات درجة اولى واما وضع المسئلة بصورة
معادلة فغير مؤسس على قواعد مطردة الا انى اذ ككر قاعدة عامة بها
يتوصل الى وضعها بصورة معادلة وان كان تطبيق تلك القاعدة يعسر فى
بعض الاحيان فاقول

(قاعدة عامة)

يجب لوضع مسئلة بصورة معادلة بعد الرمز لها بما يحروف أن تيب بواسطة
العلامات الجبرية العمليات التى يلزم اجراؤها على الكميات المجهولة باعتبارها
معادلة لتحقيق شروط منطوق المسئلة ولينطق هذه القاعدة على حل مسائل
فبقول

(المسئلة الاولى)

(٤٤) رجل اوصى قبل موته بان نصف تركته لولده وثلثها لنته وباقها وهو
 ١٢٠٠٠ قرش للفقراء والمراد معرفة مقدار تركته غروشا وما يخص كل
وارث منها

حل ذلك أن يفرض m رمزاً للتركة ومقتضى منطق المسئلة أن تكون
التركة مساوية لما يخص الولد زائداً ما يخص البنت فإدنا ١٢٠٠٠ غرش
أى

$$m = 12000 + \frac{m}{2} + \frac{m}{3}$$

ثم تجرى قاعدة الحل المعلومة على هذه المعادلة فيجدها

$$3m = 24000 + m + \frac{2m}{3} \quad \text{أى}$$

$$3m = 24000 + m + \frac{2m}{3} \quad \text{أى}$$

$$3m = 24000 + m + \frac{2m}{3} \quad \text{أى}$$

$$72000 = 3m$$

فقد ارتكبه ٧٢٠٠٠ غرش يخص الولد منها النصف وهو ٣٦٠٠٠
غرش والبنت الثلث وهو ٢٤٠٠٠ غرش والفقراء الباقى وهو ١٢٠٠٠
غرش

(المسئلة الثانية)

(٤٥) ما هو العدد اللازم ضمه لحدى الكسر $\frac{7}{3}$ ليكون الناتج مساوياً
لكمية معلومة m

حل ذلك أن يفرض أن m العدد المطلوب فيكون بالضرورة

$$\frac{7}{3} + m = m \quad \text{ثم تجرى حل هذه المعادلة بالقاعدة المعتادة فيجدها}$$

$$7 + 3m = 3m \quad \text{ثم}$$

$$7 = 0 \quad \text{ثم}$$

$$7 = (m-1) \quad \text{ثم}$$

$$m = \frac{7-1}{3} = 2$$

(مناقشة)

مناقشة المسئلة هو البحث عن الاحوال التى يؤل بها الحل بواسطة
العروض المختلفة الجارية على المعاليم

فلاحتبار

فلاختبار ما يؤل البسه الناتج $\frac{2}{3} = \frac{2}{1}$ نفرض فروض مختلفة فيه على

المعالي $\frac{2}{3}$ و m فيقال

اولا اذا فرض $\frac{2}{3} = \frac{2}{4}$ و $m = \frac{2}{4}$ بان جعل $4 = 2$ و $2 = 4$

و $m = \frac{2}{4}$ في مقدار m يؤل ذلك المقدار الى

$$m = \frac{\frac{2}{4} \times 4}{\frac{2}{4} - 1} = \frac{2 - \frac{1}{4}}{\frac{2}{4} - 1} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{2}{4} - 1} = \frac{2}{\frac{2}{4} - 1} = 2$$

لانه اذا ضم العدد 2 الى حدى الكسر $\frac{2}{4}$ يصير $\frac{2}{4} = \frac{2}{4}$ وهذا

ناتج لا اشكال فيه لموافقته لمنطوق المسألة

وثانيا اذا فرض أن $\frac{2}{3} = \frac{2}{8}$ و $m = \frac{2}{8}$ أى $m = \frac{1}{4}$ و $2 = 8$

و $8 = 2$ في مقدار m يؤل ذلك المقدار الى

$$m = \frac{\frac{2}{8} \times 8}{\frac{2}{8} - 1} = \frac{2 - \frac{1}{4}}{\frac{2}{8} - 1} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{2}{8} - 1} = \frac{2}{\frac{2}{8} - 1} = 2$$

حينئذ مقدار $m = 2$ هو ما يسمى بالحل السالب ووجه كونه

سالبا انك اذا تأملت في منطوق المسئلة شاهدت انها غير ممكنة الحل لان كسر

$\frac{2}{8}$ أكبر من $\frac{1}{4}$ واذا ضم عددا واحدا الى حدى الكسر المذكور ازداد هذا

الكسر فاذن لا يمكن اضافة عددا واحدا الى حدى الكسر $\frac{2}{8}$ ليكون الناتج

مساويا للكسر $\frac{1}{4}$ الا صغرنه فعلى هذا يكون الحل السالب $m = 2$

للمسئلة الجارى مناقشتها اذ اعلى استحالة حل المسئلة في الحالة المذكورة

فيجب حينئذ تصليح منطوق المسئلة أن تغير في المعادلة العمومية التي هي

$$\frac{2}{3} = m \text{ علامة } m \text{ فتصير } \frac{2}{3} = m$$

مسطوقها

ما هو العدد الذى يلزم طرحه من حدى الكسر $\frac{2}{3}$ ليصير الناتج مساويا

m وهو منطوق لا يختلف عن المنطوق الاصلى الالبتعير كلمة ضم بكلمة طرح

فاذن تكون المسئلة ممكنة الحل ويكون لها حل عين الحل المتقدم بقطع

الظعر العلامة لانه اذا حلت المعادلة $\frac{2}{3} = m$ يحدث

س = $\frac{2}{17}$ واذا فرض في هذا المقدار أن $\frac{1}{2} = م$ و $٨ = ٤$
 و $٢ = ٥$ يحدث س = ٢
 وثالثا اذا فرض أن $\frac{2}{3} = م$ و $\frac{٥}{٩} = م$ ا^١ بأن جعل $١ = ١$
 و $٢ = ٥$ و $٤ = ٩$ في مقدار س آلى الى
 س = $\frac{٩}{١٠} = \frac{٤}{١٠}$
 ولايضاح هذا الساتج يقال من المعلوم أن الكسر يرداد متى نقص مقامه فاذا
 صغر المقام الى غير نهاية أو ساوى صفرا كبر الكسر كذلك فاذن يكون
 للمجهول س مقدارا غير منته في الكبر أعنى مقدارا لا يحد ابدأ فالمسئلة
 تكون ايضا غير ممكنة الحل لانه اذا تأمل في منطوق المسئلة تشوه أن الكسر
 اذا ضم لحديه عددا بالعاما يلح يرداد به غير أنه لا يصير ابدأ مساويا للواحد لان
 مروق حديه واحدة دائما بحيث يدىكون أى مقدار بهذه الصورة $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{2}$ و $\frac{٥}{9}$
 دالا على استحالة حل المسئلة

(نبية)

كل عدد غير محدود يمكن يانه بالكسر $\frac{2}{3}$ أو $\frac{1}{2}$ أو بعلامة ∞
 ورابعا اذا فرض $\frac{2}{3} = م$ و $\frac{٥}{9} = م$ ٦ بأن جعل $١ = ١$
 و $٢ = ٥$ و $٤ = ٩$ في مقدار س آلى ذلك المقدار الى
 س = $\frac{٩}{١٠} = \frac{٥}{١٠}$ وتوضيح مقدار س = $\frac{2}{3}$ يقال أن مقدار
 س يكون مساويا لخارج قسمة صفر على صفرا أى مساويا للعدد اذا ضرب
 في صفرا نتج صفرا وحيث أن جميع الاعداد المحدودة المضروبة في صفرا تحت
 صفرا يمكن اعطاء س أى مقدار رقى وبهذا تكون المسئلة غير معينة الحل
 لانه اذا تأمل في منطوق المسئلة يشاهد ان تساوى حدى الكسر $\frac{٥}{9}$ لا يعبر
 بضم أى عدد اليهما فينتد يكون الساتج مساويا للواحد دائما وينتج من ذلك
 أن أى مقدار بهذه الصورة $\frac{2}{3}$ يدل على أن المسئلة غير معينة الحل
 (المسئلة الثالثة)

— ١ —

(٤٦) ساعيان ابتدأ السير من نقطتي أ و ب على مستقيم لمس من الشمال الى اليمين وكان الساعي المبتدء من ب متقدما عن الآخر بالمسافة أ ب الرموز لها بالحرف α وسرعته u وسرعة الآخر v والمراد تعيين نقطتي وضعهما حين يتكافؤ بينهما مسافة من امتداد أ ب مساوية لـ α (والمراد بسرعة الساعيين المبنية بالزمنين m و n البعدان اللذان يقطعهما الساعيان في وحدة الزمن)

فيرمز بالحرفين أ و - لوضعي الساعين حين يكون العد الحادث بينهما مساويا للكمية ثم يرمز بالحرف م للبعد المجهول الذي هو أ أو أ فالعد - المساوي أ - أ - ١ - + أ - يكون مبينا بالمقدار م - ١ + ٢

وحيث ان الزمن الذي استغرقه الساعي المبتدئ من ١ في قطع البعد s عين الزمن الذي استغرقه الآخر المبتدئ من s في قطع البعد $s - z$ + z بحث عن كل من هذين الرمين فيقال حيث ان الساعي الاول قطع البعد m في وحدة الزمن $\frac{m}{v}$ ويقطع البعد s في الزمن $\frac{s}{v}$ ومثل ذلك الساعي الثاني فانه يقطع البعد $s - z$ + z

في زمس ميبس بالمقدار $\frac{s-s-k}{2}$ فاذن تحدث هذه المعادلة

ومنہایحدیث $\frac{s+s-s}{2} = \frac{s}{2}$

$$2 \text{ م} = \text{م} - \text{م} + \text{م} + \text{أ}$$

م - م - م = م - م - م

نمبر (م - ۲) = م (س - ۱) و منها ينتج

$$\frac{(s-s)m}{s-m} = m$$

فحينئذ يكون s الذى هو عبارة عن البعد a مساويا $\frac{m(s-d)}{2-m}$

واذا رمز البعد s بالحرف s يكون $s = \frac{m(s-d)}{2-m} + s + d$

$$\frac{m(s-d)}{2-m} = \frac{2s-d}{2-m} = \frac{2s-d+s+d}{2-m} = \frac{3s-d}{2-m}$$

• (مناقشة احوال المسئلة) •

الحالة الاولى اذا فرض أن $s = 0$ و $m < 2$ حدث

$$s = \frac{m(s-d)}{2-m} \text{ و } s = \frac{2s-d}{2-m}$$

فيكون مقدار s ومقدار s سالبين لأن البسطين سالبان والمقام المشترك موجب لان m فيه اكبر من 2 .

ولاحتركا في المسئلة السابقة هل هذان المقداران يدلان على أن المسئلة ممكنة الحل فنقول

قد فرضنا في هذه ان الساعين قد ذهبا من نقطة واحدة بدليل أن $s = 0$ ومن حيث ان سرعتهما مختلفة بدليل ان $m < 2$ يوجد لحظة فيها البعد الفارق بينهما مساويا للكمية d فاذن تكون المسئلة ممكنة الحل

حينئذ لا تكون المقادير السالبة ناشئة من عدم امكانية المسئلة واعماهى ناشئة من فساد فرض اجري في وضع المسئلة على صورة معادلة لانه قد فرض ان الساعى الذاهب من a باق حلق الاخر مع أن الموضوع في هذه الحالة انهما ذهبا من نقطة واحدة وان سير الساعى a أسرع من سير الاخر s فاذن لا يكون خلفه اذا فلا يكون موضع a و s

المفروضين عند وضع المسئلة على صورة معادلة الموضعين الحقيقيين فيجب حل هذه المسئلة ووضعها على صورة معادلة أن يجعل للساعين المحليين الحقيقيين المشغولين بهما أى أن يفرض أن a على يمين نقطة s فيكون البعد a ميّدا بالحرف s والبعد s مساويا $s = s + d$

أَسْتَفْهَمُ

$$\frac{m}{s} = \frac{m-s}{s} \text{ ومنها يستخرج}$$

$$m = \frac{(s+s)}{2} \text{ وبناء على ذلك يكون}$$

$$m = \frac{(s+s)}{2}$$

فاذا فرض في هذين المقدارين أن $s = 0$ و $m < 0$ وهو عين القرض الذي حدث منه المقداران السالبان المتقدمان

$$\text{آلا الى } m = \frac{m}{2} \text{ و } m = \frac{2s}{2}$$

وهما مقداران موجبان متحدان في المقدار المجزء مع المقدارين السالبين المستخرجين مما تقدم فحينئذ يكون المقدار السالب ناتجا بعض الاجيان من فرض فاسدا جرى في وضع المسئلة على صورة معادلة

الحالة الثانية اذا فرض أن $s = 0$ و $m < 0$ آل المقداران العموميان الى

$$m = \frac{m}{2} \text{ و } m = \frac{2s}{2}$$

ومن حيث أن $m < 0$ يكون هذان المقداران موجبين لان بسطهما موجبان ومقاميهما كذلك

فاذا توكل في منطق المسئلة شوهد أنها ممكنة الحل لانه بفرض s صفرا يظهر أن المطلوب تعيين النقطة التي يلقى فيها الساعي ١ الساعي ٢ وان لحوقه به يكون محققا حيث فرضت سرعته أكبر من سرعة الساعي ٢ فحينئذ يكون للمقداران الموجبان المتقدمان دال على امكانية المسئلة

الحالة الثالثة اذا فرض أن $s = 0$ و $m > 0$ آل المقداران العموميان الى

$$س = م \div د \text{ و } م = س \times د$$

وهما مقداران سالبان لأن البسطين موجبان والمقاميين سالبان (حيث كان $م > د$) وليس أمّا نتج من فساد القرض في وضع المسألة على صورة معادلة لأن الحالة المخصوصية التي نحن بصدد حلها لا تقتضي على فرض مشکولة فيه حيث كان المطلوب تعيين النقطة التي يلحق فيها الساعي - الساعي أ وإنما يكون الحلان السالبان ناتجين من اختلال أحد شروط منطق المسألة لأن سرعة الساعي أ مفروضة أقل من سرعة الساعي - بدليل أن $م > د$ فاذن لا يمكن أن يلحق الساعي أ الساعي - وتصلح منطق المسألة يفرض في المعادلة $م = س - د$ أن $د = ٠$ ثم نغير علامة $س$ وبه نؤول إلى $م = س + د$ وبغير علامة الطرفين يحدث $م = س + د$ ونحويل هذه المعادلة إلى منطق مسأله يلاحظ أن $س$ هو الزمن الذي استغرقه الساعي أ ليقطع البعد $س$ وأن $س + د$ هو الزمن الذي استغرقه الساعي - ليقطع البعد $س + د$ وحيث أن المسافة التي قطعها الساعي أ ليصل لنقطة التلاق مع الساعي - أصغر من المسافة التي قطعها الساعي - تكون نقطة التقابل على شمال النقطة أ معادلة $م = س + د$ تحول إلى منطق لأنق هو

$$س = م \div د$$

ساعيان استدأ في السير على خط أ - من نقطتين أ و - وسيرهما من المين إلى الشمال لكن الساعي أ سابق للساعي - بالبعد د وسرعة الاول $م$ والآخر $د$ والمطلوب تعيين النقطة - من امتداد أ - التي يلحق فيها الساعي - الساعي أ

فإذا حلت المعادلة $م = س + د$ على أسلوب ما تقدم يوجد للعدين

$$١ - و - أي س - و س + د أو م المقداران$$

$$= س$$

$$س = \frac{د}{ص} \text{ و } ص = \frac{د}{س}$$

الموجبان والتحددان في المقدار المجرد مع المقدارين السالين المستخرجين مما تقدم

الحالة الرابعة اذا فرض أن $س = ٠$ و $م = د$ فالمقداران العموميان يؤلان الى

$$س = \frac{د}{٠} \text{ و } ص = \frac{د}{٠}$$

وهما مقداران غير محدودين فالمسئلة تكون حينئذ غير ممكنة الحل لان سرعة الساعين واحدة فالبعد الفارق بينهما لا يصير مساويا لصرأبدأ

الحالة الخامسة اذا فرض أن $د = ٠$ و $م = ص$ فالمقداران العموميان يؤلان الى

$$س = \frac{٠}{ص} \text{ و } ص = \frac{٠}{ص}$$

وحيث أن هذين المقدارين غير معينين يمكن اعطاء المجهولين جميع المقادير الممكنة وهو يوافق مطوق المسئلة لان الساعين خرجا من نقطة واحدة بدليل أن $د = ٠$ ولا يفتقران بدليل أن $م = ص$ فاذن يكون

$س = ص$ في جميع قطع الخط ا-ر

(انواع ناتجة من مناقشة المسائل التي بدرجة اولى)

(٤٧) قد نتج من مناقشة المسئلتين المتقدمتين أربعة أنواع من المقادير النوع الاول المقادير الموجبة والثاني المقادير السالبة والثالث المقادير التي بهذه الصورة ج والرابع المقادير التي بهذه الصورة د

فأما المقادير الموجبة فانها تدل على امكان حل المسئلة الا في مسائل احتيج فيها الى أن يكون مقدار المجهول عددا صحيحا ووجد مقداره كسرا موجبا فانها غير ممكنة الحل وذلك كالمسئلة التي يراد فيها تعين اساس جله تعداديه واما المقادير السالبة فانها تحدث من العروض العاسدة الخامسة في وضع

المسئلة على صورة معادلة أو من الخلل في معنى احد شروط منطوق المسئلة

ومتى نتج للمجهول مقدار سالب وجب أولاً اختبار وضع المسئلة على صورة معادلة هل فيه فرض يشك في معناه فان كان فيه ذلك غير معنى هذا القرض ثم تحل المسئلة الجديدة الناتجة منه فان لم يكن فيه فرض يشك فيه او كان واصح لكس وجد مقدار سالب أو جملة مقادير للجماهيل تحقق بالضرورة عدم امكانية بعض شروط منطوق المسئلة فاذا تصلح هذا المنطوق في المعادلة أو المعادلات التي حلت تغير علامات المجهول او الجماهيل التي وجدت لها مقادير سالبة ثم تحول المعادلات الجديدة الى عبارة قريية المنطوق ما امكن من المنطوق الاصل فينتج من ذلك مسئلة جديدة بمكنة الحل غير مخالفة للاولى الا في معنى بعض شروط المنطوق ومقادير مجاهيلها موجهة ومقاديرها المجردة عين المقادير التي استخرجت من المسئلة الاولى

وأما المقادير التي بهذه الصورة ج فانه تادل على أن المسئلة غير ممكنة الحل وتحدث المقادير المذكورة من عدم موافقة بعض شروط المنطوق أو من اشتراط شرط لا يمكن تحقيقه أو من أن المنطوق يستلزم على شروط أكثر من الجماهيل

وأما المقادير التي بهذه الصورة د فانه تادل على أن المسئلة غير معينة الحل والمقادير المذكورة تحدث من كون منطوق المسئلة مشتملاً على شرط متحقق دائماً أو محتوي على شروط أقل من الجماهيل

(نبيهه) *

الملاحظات المتقدمة تتحقق في جميع المسائل الصالحة للمناقشة

(مناقشة عامة للمعادلات ذات الدرجة الاولى) *

(٤٨) ولنبدء بوضع المعادلات ذات الدرجة الاولى وجملة مجاهيل وحلها فنقول كل معادلة ذات درجة اولى ومجهول واحد يمكن تحويلها الى

هذه الصورة $ax + b = 0$ التي يستخرج منها $x = -\frac{b}{a}$

* (70) *

وكل معادلتين ذاتي درجة اولى ومجهولين يمكن تحويلهما الى هذه الصورة

$$, \mu = \mu_1 + \mu_2 ?$$

$$\vec{q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2$$

فالحروف $ح$ و $ز$ و $هـ$ و $ح$ و $د$ و $هـ$ رموز الكميات صحيحة
معلومة ذات علامات ما فإذا حلت هاتان المعادلتان بمقتضى ما تقرر
يحدث

$$\frac{\bar{z}_m - \bar{z}_n}{\bar{z}_s - \bar{z}_n} = \mu \quad , \quad \frac{\bar{z}_s - \bar{z}_m}{\bar{z}_s - \bar{z}_n} = \mu$$

وكل ثلاث معادلات ذوات درجة اولى وثلاثة مجاهيل يمكن تحويلها الى هذه الصورة

$$w = u + v + z$$

$$\vec{w} = \vec{w}_e + \vec{w}_s + \vec{w}_o$$

$$\dot{u} = \dot{u}_1 + \dot{u}_2 + \dot{u}_3$$

فالحروف ح و ه و و و ح و ك و ه و و و ح و ك و ه و و
تدل على كميات صحيحة معلومة ذات علامات ما ويحدث من هذه المعادلات
الثلاث بطريقة حذف المجهولين ع و ص بالكيفية السابقة

$$\frac{250 - 250 + 250 - 250 + 250 - 250}{250 - 250 + 250 - 250 + 250 - 250} = 1$$

فإذا وضع هذا المقدار في إحدى المعادلتين ذواتي المجهولين الحادتين من
أجراء العمل توصل إلى مقدار $\frac{3}{2}$ وإذا وضع مقدارا $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$
في إحدى المعادلات الثلاث المعالومة توصل إلى مقدار $\frac{1}{2}$ لكن يمكن
استخراج مقدار $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ بطريقة مختصرة وذلك بالتبعية على أن
المعادلات الثلاث لا تتغير إذا غرت فيها الرموز

• (17) •

العلامة فيكون بسط مقدار $هه$ هكذا $هه$ — $هه$ وبسط مقدار
 $هه$ هكذا $هه$ — $هه$.

وثانيا لاستخراج المقام المشترك لقادير $هه$ و $هه$ و $هه$ المستخرجة
 من المعادلات الثلاث المحتوية على ثلاثة مجاهيل يؤخذ المكرران $هه$ و $هه$
 ويركب منهما الحدان $هه$ و $هه$ ثم يفصلان عن بعضهما بالعلامة
 — فيصيران $هه$ — $هه$ ثم يدخل المكرر الثالث $هه$ في آخر وسط
 واول كل من الحدين المذكورين على التوالى فيحدث بادخاله في الاول
 $هه$ و $هه$ و $هه$ و $هه$ وفي الثاني $هه$ و $هه$ و $هه$ و $هه$
 ثم يجعل لكل من الحدين الاولين ذوى الثلاثة حروف علامة الحد ذى
 الحرفين المكون له ثم تعبر علامة الحدود التالية على التبادل فيحدث
 $هه$ — $هه$ + $هه$ — $هه$ + $هه$ — $هه$
 ثم توضع هذه العلامة — على ثاني حرف من كل حد وهذه $هه$ على ثالث
 حرف ايضا فيحدث المقام المشترك وهو

$$هه - هه + هه - هه + هه - هه$$

ولاستنتاج بسط أحد مقادير المجاهيل الثلاثة بغير مكرر المجهول بالحرف
 المعلوم في المقام المشترك

فاذا اريد استخراج بسط مقدار المجهول $هه$ مثلا يعبر في المقام المشترك
 مكرره $هه$ بالحرف المعلوم و يحدث

$$هه - هه + هه - هه + هه - هه$$

واذا اريد استخراج مقادير المجاهيل من اربع معادلات ذوات اربعة مجاهيل
 أو خمس معادلات ذوات خمسة مجاهيل وهكذا تجري عليها اعمال كالاعمال
 المتقدمة

(٥٠) يمكن استعمال القواني العمومية المتقدمة في حل معادلات

مخصوصة وذلك بان تعريفها بالحروف بتقاديرها من المعادلات المعلومة ثم يتيسر عملها لكن حل المعادلات الرقبة من اول الامر أخصر

(٥١) البحث في هذه التقادير ثبت لنا انه يمكن ان يحدث من حل المعادلات ذوات الدرجة الاولى أربعة أنواع من التقادير

الاول التقادير الموجبة والثاني التقادير السالبة والثالث التقادير التي بهذه الصورة $\frac{1}{2}$ أو اللانهاية والرابع التقادير التي بهذه الصورة $\frac{1}{3}$ أو غير المعينة وقد علم تمامر أنه اذا كان عدد المعادلات m من عدد المجاهيل المحتوية عليها كانت جملة المعادلات ممكنة الحل ومنتهية الا اذا كانت محتوية على معادلة فاسدة أو على معادلات غير متوافقة فالحل غير ممكن ومتى كانت الجملة محتوية على معادلات متطابقة أو على بعض معادلات متداخلة في بعضها فالحل غير معين اذا قرر ذلك نطبقه على معادلة عمومية ذات مجهول واحد وعلى معادلتين عموميتين ذاتي مجهولين مقبول

اولا اذا فرض معادلة $x = m$ واستخرج منها مقدار $m = \frac{x}{1}$ وفرض فيه أيضا $x = 0$ يحدث $m = 0$ أعني أن مقدار m على مقتضى ما تقدم يكون غير محدود في الكبر فالمعادلة لا تتحقق باي مقدار محدود لانه تصير $x = 0$ وهي معادلة فاسدة لان الصفر المضروب في عدد محدود لا يساوي أحد المقدار x

وثانيا اذا فرضت معادلتان ذاتا مجهولين

$x + y = m$ و $x - y = n$ واستخرج منهما المقداران

$$m = \frac{x + y}{1} \text{ و } n = \frac{x - y}{1}$$

وجعل في هذين المقدارين العموميين $x = 0$ و $y = 0$

أي $x = 0$ و $y = 0$ أي $x = 0$ و $y = 0$

يؤول مقدار $\text{هـ} = \text{هـ} - \text{د}$ الى ل بالرمز للبسط بالحرف ل
ويكون غير محدود في الصكبر والمعادلتان المعلومتان لا تتحققان بأى مقدار
محدد وفرض المجهول هـ وتكونان في الحقيقة متخالفتين لانه يستخرج

من الفرضين المتقدمين اللذين هما $\text{د} = \text{د}$ و $\text{هـ} = \text{هـ}$
بالتقسيم على الحروف المعلقة $\frac{\text{د}}{\text{د}} = \frac{\text{هـ}}{\text{هـ}}$ و $\frac{\text{د}}{\text{هـ}} = \frac{\text{هـ}}{\text{د}}$ واذا رمز للسبتين
المتساويتين اللتين هما $\frac{\text{د}}{\text{هـ}}$ بالحرف ك وللنسبة $\frac{\text{هـ}}{\text{د}}$ بالحرف ر

يحدث

$$\frac{\text{د}}{\text{هـ}} = \text{ك} \text{ و } \frac{\text{هـ}}{\text{د}} = \text{ر} \text{ وينتج من ذلك}$$

$$\text{د} = \text{د} \text{ و } \text{هـ} = \text{هـ} \text{ و } \text{د} = \text{د} \text{ و } \text{هـ} = \text{هـ}$$

واذا بدلت في المعادلة $\text{د} = \text{هـ} + \text{د}$ هـ بالحروف د و د و هـ

بمقاديرها يحدث $\text{د} = \text{هـ} + \text{د}$ هـ وهي معادلة
متخالفة مع الثانية لانهما وان كانت عينها الا أن طرفيها قد ضربا في كيتين

مختلفتين د و هـ

وثالثا اذا كان مقدار المجهول هـ بهذه الصورة $\frac{\text{د}}{\text{هـ}}$ يكون

مقدار هـ بهذه الصورة ايضا لان مقام مقدار هـ مساويا للصفر فلم

يتق الا الالتهنة على أن بسطه ليس مساويا للصفر أو على أن $\text{د} = \text{هـ}$ $\frac{\text{د}}{\text{هـ}}$

فيقال حيث تقدم أن $\frac{\text{د}}{\text{هـ}} = \frac{\text{د}}{\text{هـ}}$ $\frac{\text{د}}{\text{هـ}} = \frac{\text{د}}{\text{هـ}}$ يحدث $\frac{\text{د}}{\text{هـ}} = \frac{\text{د}}{\text{هـ}}$ $\frac{\text{د}}{\text{هـ}} = \frac{\text{د}}{\text{هـ}}$

أو $\text{د} = \text{هـ}$ $\frac{\text{د}}{\text{هـ}} = \frac{\text{د}}{\text{هـ}}$ فادن يكون مقدار هـ بهذه الصورة $\frac{\text{د}}{\text{هـ}}$

ورابعا اذا فرض معادلة $\text{د} = \text{هـ}$ واستخرج منها $\text{هـ} = \frac{\text{د}}{\text{د}}$

وجعل في هذا المقدار العمومي $\text{د} = \text{هـ}$ و $\text{هـ} = \text{د}$ يحدث

$\text{هـ} = \text{د}$ فعلى مقتضى ما تقدم يكون مقدار هـ غير معين أعنى أن

جميع المقادير المحدودة تحقق المعادلة المعلومة لانها تصير $0 = 0$ وهي معادلة متطابقة لان الصفر اذا ضرب في عدد ما محدود يحدث حاصل مساويا لصفر

واذا فرض معادلتان ذاتا مجهولين

$$x + y = 10 \text{ و } x - y = 2 \text{ واستخرج منهما}$$

المقداران

$$x = \frac{10 + 2}{2} = 6 \text{ و } y = \frac{10 - 2}{2} = 4$$

وجعل في هذين المقدارين العموميين $x = 6$ و $y = 4$

في المعادلتين $10 = 6 + 4$ و $2 = 6 - 4$ يحدث $0 = 0$

وهو مقدار غير معين وحيث شوهد فيما تقدم أن غير المعين لا يقع الا اذا كان عدد المعادلات اقل من عدد المجاهيل يلزم البرهنة على أن هاتين المعادلتين المعلومتين ليستا الا واحدة لانه اذا استخرج من القرضين المتقدمين $x = 6$

$$y = 4 \text{ و } x = 6 \text{ بالتقسيم على الحروف المعلمة التبع}$$

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{4} \text{ و } \frac{x}{6} = \frac{y}{4} \text{ ورمزها بالحرف ك يحدث}$$

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{4} \text{ و } \frac{x}{6} = \frac{y}{4} \text{ أو } \frac{x}{6} = \frac{y}{4} \text{ و } \frac{x}{6} = \frac{y}{4}$$

واذا اوضع في المعادلة $x + y = 10$ بدل الرموز x و y و

مقاديرها المتقدمة تؤل الى $6 + 4 = 10$ و $6 - 4 = 2$ وهي معادلة لا تحاق المعادلة الثانية الا بضرب طرفيها في ك حيثئذ المعادلتان

المفروضتان ليستا الا واحدة

واذا كان مقدار x بهذه الصورة $x = 6$ يكون مقدار $y = 4$ كذلك لان

مقام $\frac{هـ}{هـ} = \frac{هـ}{هـ}$ مساو لصفر فليبق الا البرهنة على أن بسطه مساو لصفر ايضا
أي على أن $\frac{هـ}{هـ} = \frac{هـ}{هـ}$ فيقال حيث تقدم أن

$$\frac{هـ}{هـ} = \frac{هـ}{هـ} \text{ و } \frac{هـ}{هـ} = \frac{هـ}{هـ} \text{ يحدث. هـ} = \frac{هـ}{هـ} \text{ أو } \frac{هـ}{هـ} = \frac{هـ}{هـ} \text{ فاذن}$$

يكون مقدار $\frac{هـ}{هـ}$ بهذه الصورة ÷

(تبيهات)*

الاول قد نتج من جعل $\frac{هـ}{هـ} = \frac{هـ}{هـ}$ و $\frac{هـ}{هـ} = \frac{هـ}{هـ}$ ان مقدارى
هـ و هـ يكونان بهذه الصورة ÷ فاذا ضم هـ الى هـ فى الفرض فرض
هـ = هـ و هـ = هـ . حدث ناتج عين الاول مقدارا هـ و هـ
يتمتع ان يكونا معينين غير ان بينهما نسبة ثابتة لانه اذا جعل في المعادلتين
المعومتين هـ = هـ و هـ = هـ الى هـ + هـ = هـ = هـ

$$\text{و } \frac{هـ}{هـ} + \frac{هـ}{هـ} = \frac{هـ}{هـ} \text{ ومهما يحدث}$$

$$\frac{هـ}{هـ} = \frac{هـ}{هـ} \text{ و } \frac{هـ}{هـ} = \frac{هـ}{هـ}$$

وحيث نتج من فرض $\frac{هـ}{هـ} = \frac{هـ}{هـ}$ أن $\frac{هـ}{هـ} = \frac{هـ}{هـ}$ بقول مقدارا
هـ الى هـ = هـ - هـ ومنه يحدث هـ = هـ - هـ أعني
أن النسبة بين مقدارى هـ و هـ مساوية $\frac{هـ}{هـ}$ وهى نسبة
ثابتة

الثاني قد ظهر من المماثلة المتقدمة أن مقدارى المجهولين لجملة محتوية على
معادلتين ذاتى مجهولين كالتقدمتين يكونان في آن واحد لانهايين أو غير
معينين لكن هذا لا يتيسر في جملة معادلتين متشعبتين ذاتى مجهولين
الثالث قد شوهد أن المقدار الذى بهذه الصورة ÷ يدل على ان المقدار غير
معين وقد يدل مع ذلك على وجوده صروب مشتركين حدى الكسر مساو
لصفر حين يعرض فرض محصور لهدين الحدين فاذا فرض مثلا

(٧٢)*

س = $\frac{2}{3} - \frac{2}{3}$ وجعل فيه $2 = 3$ الى س = $\frac{2}{3}$ لكن

حيث أى حدى الكسر $\frac{2}{3} - \frac{2}{3}$ يقبلون القسمة على $3 - 2$ وأن

احدهما يساوى $(3-2)(2+3+2)$ والاخر يساوى $(3-2)(2+3)$

حدث س = $\frac{(2+3+2)(3-2)}{(2+3)(3-2)}$ أو س = $\frac{2+3+2}{2+3}$
يحذف المضروب المشترك

فاذا فرض الآن أن $2 = 3$ الى مقدار س = $\frac{2}{3}$
فإن يكون مقدار س معينا

واذا فرض أيضا في مقدار س = $\frac{2+3+2}{2+3}$ أن $2 = 3$ الى

الى س = $\frac{2}{3}$ لكن حيث أن مقدار س يمكن وضعه بهذه الصورة

س = $\frac{(3-2)}{(3-2)2}$ وأن حدها قابلان للقسمة على $3 - 2$ يصير

س = $\frac{2}{3}$ يحذف المضروب المشترك

فاذا فرض الآن في هذا المقدار أن $2 = 3$ الى س = $\frac{2}{3}$

واذا فرض أيضا في مقدار س = $\frac{2}{3}$ أن $2 = 3$ الى س = $\frac{2}{3}$

وس المعلوم انه يوجد مضروب مشترك بين حدى الكسر $\frac{2}{3}$ فلتعيينه

بضرب حدها في 3 فيحدث س = $\frac{2}{3}$ ثم قسمة حدى

هذا المقدار على المضروب المشترك 3 يؤل الى س = $\frac{1}{3}$

يفرض $2 = 3$ يؤل هذا المقدار الى $\frac{1}{3}$

فحينئذ مقدار س المساوى $\frac{1}{3}$ يدل في بعض الاحيان على وجود

مضروب مشترك بين حدى الكسر المبين به مقدار المجهول متى تحقق وجوده

لزم اولا حذفه ثم اجراء القروض التي بها يؤل حدى الكسر الى صفر فحينئذ

• (٧٣) •

بصير مقدار المجهول بهذه الصورة $\frac{7}{2}$ أو $\frac{7}{2}$ أو $\frac{7}{2}$ أعني أنه متناه
او عدى ولا نهائى

• (الباب الثالث) •

• (فى المربع والجذر التربيعى والمعادلات والمسائل التى بدرجته ثانية) •

• (فى المربع والجذر التربيعى) •

(٥٢) قد تقدم أن مربع للكمية هو حاصل ضرب مضروبين كل منهما
مساوئها وان الجذر التربيعى للكمية مقدار انا رفع الى الدرجة الثانية
تحصلت تلك الكمية فحينئذ يكون $\sqrt{7}$ مربع 7 و $\sqrt{7}$ الجذر التربيعى
للمعد 7 ومربع $\sqrt{7}$ هو 7

(٥٣) فخرج الجذر 7 يكون مساويا $7 \times 7 = 49$ فاعادة
(قاعدة) لتربيع جذر مربع مكرره وتضاعف اسس كل من حروفه
(قاعدة اخرى عكس المتقدمة) استخراج جذر مربع جذر يكون باستخراج
الجذر التربيعى لمكرره ثم تنصيف اسس كل من حروفه فحينئذ

$$\sqrt{49} = 7 \quad \sqrt{25} = 5$$

• (تنبية) •

الحديث يكون مربعا كاملا متى كان مكرره مربعا كاملا وكانت اسس جميع
حروفه زوجية فان لم يكن كذلك فليس بكامل وحينئذ فيوضع عليه هذه
العلامة $\sqrt{\quad}$ والكمية الناتجة من ذلك تسمى حدا غير جذرى أو جذرا
أصم او جذرا درجة ثانية وذلك نحو $\sqrt{25} = 5$ فاذا كانت الكمية
محتوية على جذر منطلق او كانت محتوية على جذر يمكن استخراجها بحيث
كمية جذرية

(٥٤) اختصار الجذر الاصم الذى بدرجته ثانية مؤسس على قاعدة هي
أن الجذر التربيعى لحاصل ضرب يكون مساويا لحاصل ضرب الجذور التربيعية

• (١٩) •

$$\overline{20} \overline{22} = 22 \times 22 \overline{16} = 22 \overline{22} \times 22 \overline{16} = 22 \overline{22} \overline{22}$$

(٥٦) ما تقدم في (بنه ٥٣) من قواعد التبريع واخذ الجذر التربيعي لحدا لم
تعرض فيه للعلامة وتعرض لها فقول
اولا ان مربع أى حد يكون موجبا دائما لانه محصل من ضرب حدين
محددين فى العلامة

وثانيا ان الجذر التربيعي لحد موجب كحد $\sqrt{+}$ يكون $+$
أو $-$ لان كلا منهما اذا رفع الى الدرجة الثانية حدث منه $\sqrt{+}$
فيكون الجذر التربيعي لحد متبوعا باللامه $+$ أو $-$ وتوضع هذه
العلامة المصاعفة \pm امامه ملفوظا بما اذا دلوا ناقص فيثبت ويكون

$$\sqrt{+} = \pm$$

وان الجذرين التربيعيين لحد سالب كحد $\sqrt{-}$ لا وجود لهما لان كل
كمية ساله أو موجبة اذا رفعت الى القوة الثانية حدث منها ناتج موجب
فيثبت ويكون $\sqrt{-}$ هو كمية تخيلية أو مقدار تخيلي والكمية الحقيقية
سواء كانت موجبة أو سالبة جذرية أو غير جذرية هي ما عدا التخيلية

(٥٧) نتأخر بتوصل اليه ابراهيم مشاهة للمتقدمة
الاولى لرفع حد الى القوة الثالثة أى التكعيب يكعب مكرره وثلاث اسمى
حروفه فتكعيب حد $\sqrt[3]{27}$ هو $\sqrt[3]{27}$ هو $\sqrt[3]{27}$

الثانية لاستخراج الجذر التكعيبي لحد يستخرج الجذر التكعيبي لمكرره ويؤخذ
ثلاث كل من اسمن حروفه فالجذر التكعيبي للحد $\sqrt[3]{27}$ هو $\sqrt[3]{27}$
الثالثة لاختصار الجذر التكعيبي الاصل لحد يستخرج الجذر التكعيبي
لمضاربه المكعبة الموحدة تحت علامة الجذر المعك كور ويوضع حذرهما

مكرر العلامة الجذر فينتد

$$\sqrt[3]{\begin{array}{c} ٢ \\ ٥٧ \end{array}} = \sqrt[3]{\begin{array}{c} ٢ \\ ٥٧ \end{array}} \times \sqrt[3]{\begin{array}{c} ٢٣ \\ ٨ \end{array}} = \sqrt[3]{\begin{array}{c} ٢٠ \\ ٤٠ \end{array}}$$

الرابعة لادخال مكررت تحت علامة جذر تكعبي يرفع هذا المكرر الى القوة الثالثة ويضرب في الكمية الكاسية تحت العلامة المد كورة فينتد

$$\sqrt[3]{\begin{array}{c} ٢٧ \\ ٥٢ \end{array}} = \sqrt[3]{\begin{array}{c} ٢٧ \\ ٥٢ \end{array}} \times \sqrt[3]{\begin{array}{c} ٢ \\ ٢ \end{array}}$$

الخامسة علامة تكعيب حذتكون دائنعاين علامة الحد وعلامة الجذر التكعبي لحدتكون ايصاين علامة الحد فينتد

$$\sqrt[3]{\begin{array}{c} ٢٦ \\ ٥٨ \end{array}} = \sqrt[3]{\begin{array}{c} ٢٦ \\ ٥٨ \end{array}} \times \sqrt[3]{\begin{array}{c} ٢٩ \\ ١٢٥ \end{array}} = \left(\sqrt[3]{\begin{array}{c} ٢ \\ ٥ \end{array}} \right)$$

(٥٨) استخرج الجذر التربيعي لكمية ذات حدود يتوقف على قاعدة

تكوين مربع الكمية المد كورة وقد تقدمت قاعدة تكوين مربع كية

ذات حدين ككمية (٥ + ٢) المساوية ٢ + ٢ + ٢ + ٢

فاذا اريد ترجيح كية ذات ثلاثة حدود ككمية ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢

للحدين ٢ + ٢ بالحرف سه فيحدث

$$(٢ + ٢ + ٢ + ٢) = (٢ + ٢) = ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢$$

وبابدال سه بمقداره يحدث

$$(٢ + ٢ + ٢ + ٢) = (٢ + ٢) = ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢$$

$$٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢$$

اعني ان مربع كية ذات ثلاثة حدود يتركب من حاصل جمع مربعات جميع

حدودها ومن ضعف حاصل ضرب حدودها شتى

وهذه القاعدة مطردة في كل كية ذات حدود لانه اذا فرض انها متحققة

في كية ذات حدود عددها م كالكمية ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢

تكون

ضرب كل من الحد الاول والثاني والثالث في الحد الرابع زائداً مربع الحد الرابع وهكذا

(٥٩) اذا طلب الآن استخراج الجذر التربيعي لكمية ذات حدود كالكمية

١ + - + + + د + الخ يفرض أ + - + + الخ
الجذر المطلوب ثم يفرض أن هاتين الكميتين مرتبتان بحسب الدرجات
التسارلية لحرف كالحرف هـ يجرى العمل هكذا

$$\begin{array}{r|l} ١ + - + + + د + الخ & ١ + - + + + د + الخ \\ \hline & ٢ + - + + + د + الخ \\ & ٣ + - + + + د + الخ \\ & ٤ + - + + + د + الخ \\ & ٥ + - + + + د + الخ \end{array}$$

فالكمية ذات الحدود ١ + - + + + د + الخ يمكن اعتبارها

حاصل ضرب كمية أ + - + + الخ في أ + - + + الخ
وحيث ان هذا الحاصل مرتب كضروبيه بحسب الدرجات التسارلية للحرف

هـ المذكور يكون حاصل ضرب أ في أ أي مربع أ (كافي تنبيه

بند ١٤) فبما عليه يستخرج أ وهو اول حذ من الجذر باخذ الجذر
التربيعي للحد الاول من الكمية ذات الحدود المعروفة ثم ربع هذا الحد الساتح
ويطرح منها فيبقى الحد الاول وهو ١ ويكون الحد الثاني - من الكمية
المذكورة ضعف حاصل ضرب اول حذ من الجذر في حده الثاني لانه اذا مر

الى - + - + د + الخ بالحرف ر يحدث ١ + - + + د + الخ
= (أ + ر) = أ + ٢أ + ر وبطرح الكميتين المتساويتين ١ و أ
من كل من الطرفين ووضع ر مضروباً مشتركاً يحدث

- + - + د + الخ = ر (أ + ر) واذا وضع بدل ر مقداره
يحدث

$$- + \gamma + \delta + \text{الخ} = (\delta + \gamma + \delta + \text{الخ}) (2\alpha + \delta + \gamma + \delta + \text{الخ})$$
 وحيث ان الكمية ذات الحدود $- + \gamma + \delta + \text{الخ}$ المرتبة بحسب
 الدرجات التنازلية تحرف الترتيب مساوية لحاصل ضرب الكمية
 $\delta + \gamma + \delta + \text{الخ}$ في الكمية $2\alpha + \delta + \gamma + \delta + \text{الخ}$
 المرتبتين كترتيبها يكون الحد الاول $-$ من الاولى مساويا لحاصل ضرب
 حد δ في 2α من الكميتين الاخيرين وبناء عليه يستنتج الحد الثاني
 δ من الجذر بتقسيم الحد الاول $-$ من الباقي الاول على 2α وهو ضعف
 الحد الاول من الجذر وحيث علم حد δ يطرح ضعف حاصل ضرب الحد
 الاول من الجذر في الحد الثاني منه ثم مربع الحد الثاني اى يطرح حاصل ضرب
 $2\alpha + \delta$ في δ من الكمية $- + \gamma + \delta + \text{الخ}$ فيبقى باق بهذه
 الصورة $\delta + \gamma + \text{الخ}$ حده الاول ضعف حاصل ضرب اول حده من
 الجذر في الحد الثالث منه γ لانه اذا رمز بالحرف γ للعتدين $\alpha + \delta$
 وبالحرف γ للحدود الباقية من الجذروهي $\delta + \gamma + \text{الخ}$ ينتج

$$+ - + \gamma + \delta + \text{الخ} = (\gamma + \delta) (2\alpha + \delta + \gamma + \delta + \text{الخ})$$
 أو
$$\delta + \gamma + \text{الخ} = \gamma (2\alpha + \delta + \gamma + \text{الخ})$$
 أو
$$\delta + \gamma + \text{الخ} = (\delta + \gamma + \delta + \text{الخ}) (2\alpha + \delta + \gamma + \delta + \text{الخ})$$
 وحيث أن الكمية $\delta + \gamma + \text{الخ}$ حاصل ضرب الكمية $\delta + \gamma + \text{الخ}$
 في الكمية $2\alpha + \delta + \gamma + \delta + \text{الخ}$ المرتبتين كترتيبها يكون δ
 مساويا لحاصل ضرب δ في 2α وبناء عليه يستنتج الحد الثالث من الجذر

بتقسيم الحد الاول من الساقى الثانى على ضعف الحد الاول من الجذر
المذكور ومثل ذلك يجرى فى استخراج باقى حدود الجذر وينتج من ذلك قاعدة
نذكرها فقول

(قاعدة) لاستخراج الجذر التربيعى للكمية ذات حدود ترتب بحسب
الدرجات التصاعديّة أو التنازليّة لحد حروفها ثم يستخرج الجذر التربيعى
لحدّها الاول فيكون الحد الاول من الجذر المطلوب ثم يربع هذا الحد ويطرح
من الكمية ذات الحدود المعلومة ثم يقسم الحد الثانى من الكمية المعلومة على
ضعف الحد الاول من الجذر فينتج الحد الثانى من الجذر المطلوب فيضعف
حاصل ضرب اول حد من الجذر فى الحد الثانى منه ثم يضم الى الصغف
المذكور وتربيع هذا الحد ويطرح المجموع من الباقي الاول ثم يقسم الحد
الاول من الساقى الجديد على ضعف الحد الاول من الجذر فينتج الحد الثالث
من الجذر ثم يكون ضعف حاصل ضرب الحد الاول والثانى من الجذر فى الثالث
ويضاف على الحاصل مربع حد الجذر الثالث ويطرح المجموع من الباقي الثانى
ولايجاد الحد الرابع من الجذر يقسم الحد الاول من الباقي الثالث على ضعف
الحد الاول من الجذر ثم يجرى باقى العمل على اسلوب ما تقدم

ولتطبيق هذه القاعدة على استخراج الجذر التربيعى للكمية ذات الحدود

$28x^2 + 12x - 9$ $12x^2 + 9x - 16$ $7x^2$ ترتب بحسب

الدرجات التصاعديّة للعرف و يجرى العمل هكذا

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 ٢ \quad ٢ \quad ٢ \quad ٢ \\
 ٢٢ + ٥٢ - ٥٤
 \end{array} & \begin{array}{r}
 ٤ \quad ٢ \quad ٢٢ \quad ٢٢ \quad ٢٢ \quad ٢٢ \\
 ٢٩ + ٥٢ ١٢ - ٥٢ ٢٨ + ٥٢ ١٦ - ٥٢ ٤
 \end{array} \\
 \hline
 ٥٢ - ٥٨ & ٥١٦ -
 \end{array}$$

الباقى الاول - ٥٢ ٢٩ + ٥٢ ١٢ - ٥٢ ٢٨ + ٥٢ ١٦ -

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 ٢ \quad ٢ \\
 ٢٢ + ٥٢ ٤ - ٥٨
 \end{array} & \begin{array}{r}
 ٢٢ \quad ٢ \\
 ٥٢ ٤ - ٥٢ ١٦ +
 \end{array} \\
 \hline
 ٢٢ + & ٢٩ + ٥٢ ١٢ - ٥٢ ٢٤ +
 \end{array}$$

الباقى الثانى

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 ٤ \quad ٢ \quad ٢٢ \\
 ٢٩ - ٥٢ ١٢ + ٥٢ ٢٤ -
 \end{array} & \\
 \hline
 .. & ..
 \end{array}$$

الباقى الثالث

بأن يستخرج الجذر التربيعى للعد ١٦ فيكون ٤ وهو الحد الاول
 للجذر ثم يربع هذا الحد وي طرح من الكمية ذات الحدود المعلومة فيصـ
 بقا - ١٦ حـ ٢ + ٢٨ حـ ٢ - ١٢ حـ ٢ + ٩ حـ ٤ يقسم حده الاول
 - ١٦ حـ ٢ على ٨ حـ ٢ الذى هو ضعف الحد الاول من الجذر فينتج الحد
 الثانى للجذر وهو - ٢ حـ ٢ وتحصيل ضعف حاصل ضرب الحد الاول
 من الجذر فى الثانى وتحصيل مربع الحد الثانى يكتب هذا الحد الاخير على
 شمال ضعف الحد الاول ثم ي ضرب الناتج وهو ٨ حـ ٢ - ٢ حـ ٢ فى الحد
 الثانى - ٢ حـ ٢ ثم يطرح الحاصل من الباقى الاول فيحدث باق ثان
 ٢٤ حـ ٢ - ١٢ حـ ٢ + ٩ حـ ٤ يقسم حده الاول ٢٤ حـ ٢ على ضعف
 الحد الاول من الجذر ٨ حـ ٢ فينتج الحد الثالث ٣ حـ ٢ من الجذر
 وتكون ضعف حاصل ضرب الحد الاول والثانى فى الثالث ومربع الثالث
 يكتب هذا الحد الاخير على شمال ضعف الحد الاول والثانى ثم ي ضرب الناتج
 ٨ حـ ٢ - ٤ حـ ٢ + ٢ حـ ٢ فى الحد الثالث ٣ حـ ٢ ثم يطرح الحاصل من

الحد الاخير وكان مع ذلك الحد الاول من كل باق في جري العمل قابلا
للقسمة على ضعف الحد الاول من الجذر

الرابع الكمية ذات الحدود المربعة بحسب الدرجات التنارلية لحرف يعرف
انها غير مربع كامل متى كان ضعف أس هذا الحرف في الحد الاخير من الجذر
اقل من أس هذا الحرف في الحد الاخير من الكمية ذات الحدود المعلومة
لان الحد الاخير من الكمية ذات الحدود المعلومة يجب ان يكون مربع الحد
الاخير من الجذر فيكون أس حرف الترتيب في الحد الاخير من الكمية ذات
الحدود المعلومة ضعف أس هذا الحرف في الحد الاخير من الجذر وحيث ان
ضعف أس حرف الترتيب في الحد الاخير من الجذر أقل من أس حرف
الترتيب في الحد الاخير من الكمية المعلومة وان أس حرف الترتيب
في الجذر لا تزل متناقصة لا ينتج في الجذر حد مربعه مساو للحد الاخير من
الكمية ذات الحدود المفروضة فينبذ لا يمكن انتهاء العملية

الخامس ذات الحدين لا تكون مربعا كاملا ابد لان مربع الحد ودمربع
ذات الحدين ثلاثة حدود ومربع ذات الحدود اربعة حدود اقل ما هالك

(٦٠) متى اريد استخراج الجذر التربيعي لكمية ذات حدود بعضها
مشتمل على حرف الترتيب بأس واحد نضع هذه الكمية كوضعها في عمل
التقسيم المتقدم في (بند ٢١) فينبذ نؤل العمليات الجبرية المينة
بالقاعدة العمومية من البند المذكور الى استخراج الجذر التربيعي للكمية
المعلومة او الى تقسيم كية ذات حدود على اخرى

(٦١) قد سبق الكلام على استخراج الجذر التربيعي للكميات الجبرية الصحيحة
ولا استخراج الجذر التربيعي للكسور تلك الطريقة المقررة في علم الحساب لان
مربع الكسر يتكون برفع حديه للدرجة الثانية فينبذ يستخرج جذر الكسر
باستخراج الجذر التربيعي لكل من حديه

(في حساب الجذور الصم ذات الدرجة الثانية والثالثة)

(٦٢) الجذران الاصمان يكونان متشابهين اذا اتحدت درجتهم

(٨٤)

واتحدت الكميات الموضوعة تحت علامتهما جذرا

$$\sqrt{2} \sqrt{3} \text{ و } \sqrt{2} \sqrt{5}$$

متشابهان وكذلك جذرا

(الكلام على جمع تلك الجذور وطرحها)

مكرر الجذر يدل على عدد مرات تكرار هذا الجذر فيثبت جمع جذرين متشابهين أو طرحهما يكون بجمع أو طرح مكرريهما ثم وضع حاصل الجمع أو باقى الطرح امام الجذر المشترك فاذن يكون

$$\sqrt{2} \sqrt{3} + \sqrt{2} \sqrt{5} = \sqrt{2} \sqrt{15} \text{ و } \sqrt{2} \sqrt{3} - \sqrt{2} \sqrt{5} = \sqrt{2} \sqrt{15}$$

$$\sqrt{2} \sqrt{3} + \sqrt{2} \sqrt{5} = \sqrt{2} \sqrt{15} \text{ و } \sqrt{2} \sqrt{3} - \sqrt{2} \sqrt{5} = \sqrt{2} \sqrt{15}$$

$$\sqrt{2} \sqrt{3} + \sqrt{2} \sqrt{5} = \sqrt{2} \sqrt{15} \text{ و } \sqrt{2} \sqrt{3} - \sqrt{2} \sqrt{5} = \sqrt{2} \sqrt{15}$$

ومتى كان الجذران غير متشابهين لا يمكن بيان حاصل جمعهما أو فاضلهما إلا بالعلامة

(في الكلام على ضرب تلك الجذور)

لايجاد حاصل ضرب جذرين متحدى الدرجة تضرب الكميتان الموضوعتان تحت علامتى الجذرين في بعضهما ثم يوضع الحاصل تحت علامة الجذر المذكور مثال ذلك

$$\sqrt{2} \sqrt{3} \times \sqrt{2} \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 5} = \sqrt{60}$$

$$\sqrt{2} \sqrt{3} \times \sqrt{2} \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 5} = \sqrt{60}$$

$$\sqrt{2} \sqrt{3} \times \sqrt{2} \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 5} = \sqrt{60}$$

$$\sqrt{2} \sqrt{3} \times \sqrt{2} \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 5} = \sqrt{60}$$

ومثل هذا يجري في ايجاد حاصل ضرب جذرين بدرجة ثالثة (وكان يمكن الاستغناء عن اثبات هذه القاعدة بما تقدم في (بند ٥٤) من أن

$$\sqrt{2} \sqrt{3} \times \sqrt{2} \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 5} = \sqrt{60}$$

$$\sqrt{2} \sqrt{3} \times \sqrt{2} \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 5} = \sqrt{60}$$

واذا كان للجذرين مكرران يضرب هذان المكرران في بعضهما ويوضع حاصل

ضربهما امام الجذر فيثبت

$$\sqrt[3]{5 \times 7 \times 10} = \sqrt[3]{5 \times 7 \times 10} \times \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{5 \times 7 \times 100} = \sqrt[3]{5 \times 7 \times 10^2}$$

$$\sqrt[3]{5 \times 7 \times 10^2} = \sqrt[3]{5 \times 7 \times 10^2} \times \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{5 \times 7 \times 10^3} = \sqrt[3]{5 \times 7 \times 10^3}$$

* (في قسمة الجذور) *

لتقسيم جذر على آخر متجهدين في الدرجة تقسم احدى الكمينين اللتين تحت علامة الجذر على الاخرى ويوضع على خارج القسمة علامة الجذر فيجئ

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{7}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{7}} \times \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7}} = \left(\frac{\sqrt[3]{5 \times 7}}{\sqrt[3]{7 \times 7}} \right) \text{ لان } \sqrt[3]{\frac{5}{7}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{7}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{7}} = \frac{\sqrt[3]{5 \times 7}}{\sqrt[3]{7 \times 7}} \text{ ويكون ايضا } \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{7}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{7}}$$

وكذا يقال فيما اذا كان الجذران بدرجة ثالثة

واذا كان الجذرين مكرران يقسم احدهما على الاخر ويوضع خارج قسمتهما امام الجذر فيجئ

$$\sqrt[3]{5 \times 7 \times 10} = \sqrt[3]{5 \times 7 \times 10} \times \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{5 \times 7 \times 10^2} = \sqrt[3]{5 \times 7 \times 10^2}$$

(٦٣) القواعد التي تقدمت بانها لا توافق حالة ضرب حدين تحلين ولا حالة

تقسيم حدين حتى على آخر تحلي

فعلى مقتضى التعريف يكون مربع $1 - \sqrt{2}$ مساويا $1 - \sqrt{2}$ أي

$$1 - \sqrt{2} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \text{ ومنه يجئ } 1 - \sqrt{2} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$$

فيخرج من ذلك أن

$$1 - \sqrt{2} \times 1 + \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2} \times 1 + \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2} \times 1 + \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{2}}{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2} = \frac{1 - \sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2} - 1$$

$$= \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2} = \frac{1 - \sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2} - 1 \text{ وان } \frac{1}{1 - \sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{2}}{(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})} = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - 2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{-1} = -1 - \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{1 - \sqrt{2}} = -1 - \sqrt{2} = -1 - \sqrt{2}$$

(٦٤) اذا كان مقام الكسر اصم فن المهم تحويله الى منطق
فاذا كان المقام الاصم ذو الحد الواحد جذرا بدرجة ثانية لزم تحويله ضرب
كل من حدى الكسر فى مقامه فينتذر

$$\frac{\sqrt{2} \sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2 \sqrt{2}}$$

واذا كان المقام الاصم ذو الحد الواحد جذرا بدرجة ثالثة يكتفى تحويله
ان يضرب كل من حدى الكسر فى تربيع هذا المقام فينتذر

$$\frac{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{2}}{2} = \frac{(\sqrt[3]{2})^2}{(\sqrt[3]{2})^2 \times 2} = \frac{2}{2 \sqrt[3]{2}}$$

واذا كان المقام الاصم مشتملا على كمية ذات حدين احدهما أو كلاهما جذر
بدرجة ثانية يكتفى تحويله ان يضرب حدى الكسر فى كمية ذات حدين مركبة
من الحد الاول من المقام ومن حده الثانى مسسوقا بعلامة مخالفة لعلامته
لان من المعلوم أن حاصل ضرب مجموع كيتين فى فاضلهما يساوى فاعل
مربعيهما فاذا ن يكون

$$\frac{(\sqrt{2} - 2)}{2} = \frac{(\sqrt{2} - 2)}{(\sqrt{2} - 2)(\sqrt{2} + 2)} = \frac{2}{\sqrt{2} + 2}$$

$$\frac{(\sqrt{2} + 2)}{2} = \frac{(\sqrt{2} + 2)}{(\sqrt{2} + 2)(\sqrt{2} - 2)} = \frac{2}{\sqrt{2} - 2}$$

$$\frac{(\sqrt{2} - \sqrt{2})}{2} = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{2})}{(\sqrt{2} - \sqrt{2})(\sqrt{2} + \sqrt{2})} = \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{2}}$$

$$\frac{(\sqrt{2} + \sqrt{2})}{2} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{2})}{(\sqrt{2} + \sqrt{2})(\sqrt{2} - \sqrt{2})} = \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{2}}$$

وهذه التحاويل تجري حين يكون المقام الاصم مشتملا على كمية ذات حدود
بعضها أو جميعها جذر بدرجة ثانية مثال ذلك

مقدار $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{7}}$ يمكن اعتبار مقامه كمية ذات حلوتين
حدها الاول $\sqrt{7}-\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{7}$ والثاني $\sqrt{7}-\sqrt{3}\sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{7}$ فادا ضرب كل من
حدى هذا الكسرى في الكمية ذات الهدين المذكورة يان غبرت علامة حدها
الثاني آل

$$\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{7}} \text{ الى } \frac{1}{(\sqrt{7}-\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{7})(\sqrt{7}-\sqrt{3}\sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{7})}$$

$$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{7}}{(\sqrt{7}-\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{7})(\sqrt{7}-\sqrt{3}\sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{7})} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{7}}{(1-\sqrt{7})^2}$$

وبضرب حدى هذا الناتج الاخير في $(1+\sqrt{7})$ يحدث

$$= \frac{(1+\sqrt{7})(\sqrt{7}-\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{7})}{(1+\sqrt{7})(1-\sqrt{7})^2} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{7}}{(1-\sqrt{7})^2}$$

$$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{7}}{(1-\sqrt{7})^2}$$

وباختصاره يحدث

$$= \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{7}}{(1-\sqrt{7})^2}$$

$$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{7}}{(1-\sqrt{7})^2}$$

(٦٥) اذا اشتقلت متساوية على كيات منطقة وكيات غير منطقة كانت
جرا المنطقة في احد الطرفين مساوية لاجرائها في الطرف الاخر وكذلك
غير المنطقة

فادا فرضت متساوية $\sqrt{7}-\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{7} = \sqrt{7}-\sqrt{3}\sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{7}$ وفرض أن $\sqrt{7}$ و $\sqrt{3}\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}\sqrt{7}$
غير منطقيين وأن $\sqrt{7}$ و $\sqrt{3}\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}\sqrt{7}$ منطقيين كان $\sqrt{7} = \sqrt{3}\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}\sqrt{7} = \sqrt{3}\sqrt{2}$
لانه بحويل $\sqrt{7}$ الى الطرف الثاني من المتساوية $\sqrt{7} = \sqrt{3}\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}\sqrt{7} = \sqrt{3}\sqrt{2}$
و $\sqrt{7} = \sqrt{3}\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}\sqrt{7} = \sqrt{3}\sqrt{2}$

والاذا فرض أن $هـ - ج = م$ ورفع كل من الطرفين الى الدرجة الثانية
حدث

$$م^2 + د + م^2 + م^2 = م^2 + د + م^2$$

$$م^2 - م^2 = د - د$$

وهي متساوية مستحيلة لان الكمية المنطقة $د - م^2$ و لا تكون
متساوية للكمية غير المنطقة $م^2 - م^2$ الا اذا فرض $م = ٠$

وحيث أن $م = هـ - ج$ يكون $هـ = ج$ فحيث كان
 $هـ = ج$ ينتج من المتساوية $ج + د = ج + د$
أن $ج = د$ فحيث يكون

$$ج = د$$

(٦٦) كل مقدار بهذه الصورة $ج + د$ يمكن تحويله بسهولة
الى مقدار بهذه الصورة $ج + د$ بحيث تكون كبات $ج$ و $د$ و $ج$ و $د$
الداخله في هذين المقدارين منطقة

وللوصول الى ذلك نرفع الكمية $ج + د$ الى الدرجة الثانية فتصير

$$(ج + د)^2 = ج^2 + د^2 + ٢ ج د$$

لكل من الطرفين فيحدث

$$ج + د = ج + د = ج + د$$

واذا فرض أن $ج = د$ و $د = ج$ يحدث

$$ج + د = ج + د$$

وبالعكس يمكن تحويل مقدار $ج + د$ الى آخر بهذه الصورة

$$ج + د$$

$\sqrt{7} + \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$ بحيث تكون كيات $\sqrt{7}$ و $\sqrt{7}$ و $\sqrt{7}$ جذرية
والوصول الى ذلك يربع كل من طرفي المتساوية

$$\sqrt{7} + \sqrt{7} = 2\sqrt{7} \quad \text{فيجذب}$$

$$7 + 7 = 28 \quad \text{وبمقتضى ما تقدم في (١) يسد}$$

(٦٥) يحدث

$$\sqrt{7} = 2 + \sqrt{7} \quad (١) \quad \text{و} \quad \sqrt{7} = 2 + \sqrt{7} \quad (٢)$$

واذا ربع كل من طرفي المتساوية (١) وطرح من الناتج المتساوية (٢)

$$\sqrt{7} - \sqrt{7} = 2 - 2 = 0 \quad \text{يحدث}$$

$$\sqrt{7} - \sqrt{7} = 0 \quad (٣) \quad \dots\dots\dots$$

ويحدث أيضا من المتساويتين (١) و (٢)

$$\sqrt{7} - \sqrt{7} = 0 \quad \text{و} \quad \sqrt{7} - \sqrt{7} = 0$$

وحيث فرض أن $\sqrt{7}$ و $\sqrt{7}$ منطقان يلزم أن يكون $\sqrt{7} = \sqrt{7}$ مريعا

كاملا فاذا رجع لهذا المربع بالحرف $\sqrt{7}$ يحدث

$$\sqrt{7} = 2 + \sqrt{7} \quad (٤) \quad \text{و} \quad \sqrt{7} = 2 + \sqrt{7} \quad (٥)$$

اعني أنه يلزم لا مكان تحويل مقدار $\sqrt{7} + \sqrt{7}$ الى مقدار بهذه الصورة

$$\sqrt{7} + \sqrt{7} = 2\sqrt{7} \quad \text{أن يكون} \quad \sqrt{7} = 2 + \sqrt{7}$$

الحرف $\sqrt{7}$ يعلم المقداران $\sqrt{7}$ و $\sqrt{7}$ من القانونين

$$\frac{\sqrt{7}}{2} = 1 \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{7}}{2} = 1$$

• (في) •

• (في) •

قد فرض في المساوية $\overline{2} \cdot 2 + \overline{2} \cdot 2 = \overline{2} \cdot 2 + \overline{2} \cdot 2$ ان الجذور
الاربعة موجبة وحيث تقدم ان $\overline{2} \cdot 2 + \overline{2} \cdot 2 = \overline{2} \cdot 2 + \overline{2} \cdot 2$
ينج منه ان $\overline{2} \cdot 2 = \overline{2} \cdot 2$ فاذن يلزم ان تكون علامتا الجذرين
 $\overline{2} \cdot 2$ و $\overline{2} \cdot 2$ متحدتين فتكون علامة $\overline{2} \cdot 2$ موجبة اذا كانت
علامتا $\overline{2} \cdot 2$ و $\overline{2} \cdot 2$ متحدتين وتكون علامته سالبة اذا كانت علامتا
 $\overline{2} \cdot 2$ و $\overline{2} \cdot 2$ متخالفتين اعني اذا كانت علامة $\overline{2} \cdot 2$ موجبة تكون
علامتا $\overline{2} \cdot 2$ و $\overline{2} \cdot 2$ متحدتين واذا كانت علامة $\overline{2} \cdot 2$ سالبة
تكون علامتا $\overline{2} \cdot 2$ و $\overline{2} \cdot 2$ متخالفتين

ولطبق ما ذكرناه على مثالين فنقول

المثال الاول اذا اريد تحويل المقدار $\overline{2} \cdot 2 + \overline{2} \cdot 2$ الى جذرين
منفردين يكون بمقتضى ما تقدم $\overline{2} \cdot 2 = \overline{2} \cdot 2$ و $\overline{2} \cdot 2 = \overline{2} \cdot 2$ ومنه

يجد $\overline{2} \cdot 2 = \overline{2} \cdot 2$ وحيث ان $\overline{2} \cdot 2 = \overline{2} \cdot 2$ مربع كامل
يمكن تحويل مقدار $\overline{2} \cdot 2 + \overline{2} \cdot 2$ الى مقدار بهذه الصورة

$\overline{2} \cdot 2 + \overline{2} \cdot 2$ وحيث تقدم ان $\overline{2} \cdot 2 = \overline{2} \cdot 2$ يكون $\overline{2} \cdot 2 = \overline{2} \cdot 2$
او $\overline{2} \cdot 2 = \overline{2} \cdot 2$ ويكون ايضا $\overline{2} \cdot 2 = \overline{2} \cdot 2$ و $\overline{2} \cdot 2 = \overline{2} \cdot 2$
فاذن يكون $\overline{2} \cdot 2 + \overline{2} \cdot 2 = \overline{2} \cdot 2 + \overline{2} \cdot 2$ وتكون
علامتا $\overline{2} \cdot 2$ و $\overline{2} \cdot 2$ متحدتين لان $\overline{2} \cdot 2$ له علامة +

المثال الثاني اذا فرض ان المراد تحويل المقدار $\overline{2} \cdot 2 - \overline{2} \cdot 2$ الى
ما ذكر يكون بمقتضى ما تقدم $\overline{2} \cdot 2 = \overline{2} \cdot 2$ و $\overline{2} \cdot 2 = \overline{2} \cdot 2$ و $\overline{2} \cdot 2 = \overline{2} \cdot 2$

اعني

أعني $ه = ١$ فاذاً يكون $٢ = \frac{١+٢}{٢} = ٣$ و $٣ = \frac{١-٢}{٢} = ١$ فيثبت يكون

$٢ - ٣ = ٢ - ٣ = ١$ و $٣ - ٢ = ٣ - ٢ = ١$ أعني أنه يلزم أن تكون علامتا ٢ و ٣ متخالفين لأن الحد $٢ - ٣$ له علامة ناقص

• (في المعادلات والمسائل ذات الدرجة الثانية) •

• (في المعادلات ذات الدرجة الثانية والمجهول الواحد) •

(٦٧) المعادلة ذات الدرجة الثانية والمجهول الواحد هي المحتوية على مجهول أسه الاعظم مساو ٢ وتنقسم المعادلة المذكورة الى معادلة تامة وغير تامة

فغير التامة هي المحتوية على المجهول بدرجة ثانية فقط كمعادلة $٢ = ٣$ وتسمى معادلة ذات حدين والتامة هي المحتوية على المجهول بدرجة اولى وثانية كمعادلة

$٢ + ٣ = ٤$ وتسمى معادلة ذات ثلاثة حدود

• (في المعادلة غير التامة ذات الدرجة الثانية) •

(٦٨) كل معادلة غير تامة متشعبة كانت او غير متشعبة يمكن تحويلها الى

معادلة بهذه الصورة $٢ = ٣$ فيها رمز ٢ و ٣ يدلان على

كيتين صحيحتين سالبتيين أو موجبتين ومنها يستخرج $٢ = ٣$ أو $٣ = ٢$

$٢ = ٣$ بملاحظة أن الجذر التربيعي لكمية يكون مسبوقاً بعلامة

٢ فادفرض أن ٢ رمز للكسر $\frac{٢}{٣}$ يكون المجهول ٢ مقداران

متساويان ومتخالفان في العلامة أي

$٢ = ٣$ و $٢ = ٣$

• (نبيه) •

لا يكون جذر الطرف الثاني مسبوقاً بعلامة \pm وحده بل جذر الطرف
الاول كذلك فادن يحدث \pm م = \pm م و منها يحدث أربعة
مقادير للجهول وهي \pm م = \pm م و \pm م = \pm م و \pm م = \pm م
فإذا غيرت علامتا المقدارين الآخرين صارا متطابقين مع الاولين الحادثين
من مقدارى الجذر التريعى المستبوق بعلامة \pm - الطرف الثانى فادن
لا يكون للجهول مية الا مقداران حقيقيان

وتتحقق أن م له مقداران فقط ان وضع بدل م المقدار (م) \pm
عوضاً عنه فى المعادلة \pm م = \pm م فتؤول الى م = (م) \pm م = ٠
وحيث أن م = (م) \pm م = (م + م) (م - م) \pm م
يحدث (م + م) (م - م) \pm م = ٠
ولاجل أن يكون الطرف الاول الذى هو حاصل ضرب مساويا لصفر يلزم أن
يكون كل من مضروبى الطرف الاول مساويا لصفر اذا تقرر ذلك
وصل الى

م = م + م = ٠ و م = م - م = ٠ ومنهما يحدث
م = م + م = ٠ و م = م - م = ٠
فالجهول الداخلى فى المعادلة ذات الدرجة الثانية غير التامة يكون له
مقداران فقط يسميان جذرى المعادلة وهذان الجذران يكونان متساويين
ومتخالفين فى العلامة ويكونان حقيقيين وتخيليين بحسب كون م موجبا
أو سالبا

(٦٩) ولنطبق القاعدة المتقدمة على مثالين مخصوصين فنقول
المثال الاول ان يفرض أن المطلوب حل هذه المعادلة

$$\pm \text{ م} = \pm \text{ م}$$

(٩٣)

$$\frac{س^٢ + س}{٨ - س} = \frac{س^٢}{٨ - س}$$

فيحذف المقامان يحدث $٤ س^٢ + س = ٨ س - س^٢ - ١٦$ $س^٢ = ٣$
ثم تحول الكميات المعالمة الى الطرفين الثاني والمجهولة الى الاول ويختصر
الحدود المتشابهة فيحدث

$$س^٢ = ١٦ \text{ أو } س^٢ = ١٦ - ٤ = ١٢$$

فاذا رمز بالحرفين س و س في جذري المعادلة يكون

$$س = ٤ + ٤ \text{ و } س = ٤ - ٤$$

المثال الثاني أن يفرض ان المطلوب حل المعادلة $\frac{س^٢ - س}{س} = س + ١$
فباجراء العمل كما تقدم في المثال الاول يحدث

$$س^٢ - س = س^٢ + س + ١$$

$$س^٢ = س^٢ + س + ١$$

$$س = س + ١ \text{ أو } س = س - ١$$

أعني أن جذري المعادلة يكونان تخيليين

(في المعادلة السامة ذات الدرجة الثانية)

(٧٠) كل معادلة تامة بدرجة ثانية يمكن ايلولتها الى هذه الصورة

$س^٢ + س + ه = ه$ التي فيها الرموز س و س و ه تدل
على كيان موجبة كانت أو سالبة فاذا قسم كل من طرفي هذه المعادلة على

$$س \text{ تصبح } س^٢ + س + \frac{ه}{س} = \frac{ه}{س}$$

$$\text{واذا فرض أن } \frac{ه}{س} = ح \text{ و } \frac{ه}{س} = ك \text{ يحدث}$$

$$س^٢ + ح س + ك = ٠$$

(٢٤)

ولحل هذه المعادلة يلاحظ انه اذا كانت المعادلة المذكورة بهذه الصورة
 $س^٢ + ٢ ح س + ٢ = ٢$ أى أن طرفها الاول مربع كامل للكمية
 ذات الحدين $س + ح$ امكن تحويلها الى معادلة بدرجة اولى بان يؤخذ
 الجذر التربيعى لكل من طرفيها فينتدبسمل حلها

وتحويل المعادلة $س^٢ + ح س + ٢ = ٢$ الى الصورة المتقدمة
 يحول $ك$ الى الطرف الثانى فتؤول الى $س^٢ + ح س = ٠$ $ك - = ٠$
 ثم يعتبر $س + ح$ $س$ حدين لمربع $ك$ كمية ذات حدين
 فيكون $س$ مربع الحد الاول لها و $ح س$ ضعف حاصل
 ضرب الحد الاول فى الثانى فيكون الثانى مساويا $\frac{ح}{٢} = \frac{س}{٢}$ فاذا ضم
 الى طرفي المعادلة $س^٢ + ح س = ٠$ $ك - = ٠$ مربع الحد $\frac{ح}{٢}$ تحدث
 المعادلة

$$س^٢ + ح س + \frac{ح^٢}{٤} = \frac{ح^٢}{٤} + ٠ = ٠$$

التي طرفها الاول مربع كامل ومساو لمربع الكمية ذات الحدين $س + \frac{ح}{٢}$
 فاذا استخرج جذرا طرفيها يحدث

$$س + \frac{ح}{٢} = \pm \sqrt{\frac{ح^٢}{٤}} \text{ و منها يحدث}$$

$$س = -\frac{ح}{٢} \pm \sqrt{\frac{ح^٢}{٤}} - ٠$$

وينتج من هذا القانون الاخيران للجهول $س$ مقدارين فاذا رمز لهما
 بالرمزين $س$ و $س$ يحدث

$$س = -\frac{ح}{٢} + \sqrt{\frac{ح^٢}{٤}} \text{ و } س = -\frac{ح}{٢} - \sqrt{\frac{ح^٢}{٤}}$$

وينتج ابصار القانون المتقدم انه متى حوت المعادلة السامة ذات الدرجة

* (٩٥) *

الثانية الى اخرى بهذه الصورة

$$س^٢ + ح س + ك =$$

يكون مقدار المجهول مساويا لنصف مكرر الحد الثاني بعلامة مخالفة لعلامته زائدا أو ناقصا جذر مربع حاصل الجمع الناتج من ضم مربع نصف مكرر الحد الثاني الى الحد المعلوم بعلامة مخالفة لعلامته

* (تنبيه) *

قد وضع في اخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة

س^٢ + ح س + ك = س^٢/٤ + ح س + ك - س^٢/٤ امام الجذر التربيعي للطرف الثاني العلامة المضاعفة ± مع انه ينبغي وضعها امام جذر الطرف الاول ايضا

لان س^٢ + ح س + ك = س^٢/٤ + ح س + ك - س^٢/٤ ايضا لكي اذا وضعت العلامة - امام جذر الطرف الاول فالجذران الناتجان للصهول س يصيران بعد تغيير العلامة عين الجذرين الحادتين من حين وضع علامة + فاذن يكتب في موضع العلامة المضاعفة ± امام الجذر التربيعي للطرف الثاني فقط

* (تجربيات على حل المعادلات) *

(٧١) اذا اردت حل المعادلة الرقية التي هي س^٥/٩ - س^٢/٩ + س^٣/٩ =

٨ - س^٢/٩ - س^٢ + س^٢/١٢ تحول اولاهذه المعادلة الى اخرى

بهذه الصورة س^٢ + ح س + ك = ٠ ويتوصل الى ذلك بمحذوف المقامات فيحدث بعد حذفها من المعادلة المذكورة

$$١٠ س^٢ - ٦ س + ٩ = ٩٦ - ٨ س - ١٢ س^٢ + ٢٧٣$$

وتحويل جميع حدود هذه المعادلة الى الطرفين الاول وتول الى

$$٢٢ر٢ر٢ + ٢ر٢ = ٣٦٠ - ٢ر٢ \quad \text{أو} \quad ٢ر٢ + ٢ر٢ = ٣٦٠ - ٢ر٢$$

وبتطبيق القانون

$$\begin{aligned} \text{ر٢ر} &= \frac{٣٦٠}{٢٢} - \frac{٢}{٢٢} \\ \text{ر٢ر} &= \frac{٣٦٠}{٢٢} + \frac{١}{٢٢} \end{aligned}$$

ويمكن حل المعادلة المذكورة $٢ر٢ + ٢ر٢ = ٣٦٠$ من اول الامر بان يحول $\frac{٣٦٠}{٢٢}$ الى الطرف الثاني ويضرب لكل من طرفيها $(\frac{١}{٢٢})$ وهو مربع نصف مكرر المجهول $٢ر٢$ فيصير

$$\frac{٣٦٠}{٢٢} + \frac{١}{٢٢} = \frac{٣٦٠}{٢٢} + \frac{٢}{٢٢} + ٢ر٢$$

ثم باخذ الجذر التربيعي لكل من طرفيها فيصير

$$\begin{aligned} \text{ر٢ر} + \frac{١}{٢٢} &= \frac{٣٦٠}{٢٢} + \frac{١}{٢٢} \\ \text{ر٢ر} &= \frac{٣٦٠}{٢٢} + \frac{١}{٢٢} \end{aligned}$$

وهو ناتج عين الناتج المتقدم من تطبيق المعادلة المذكورة على القانون العام فلم يبق حينئذ الا اجراء العمليات الحسابية اى تحويل الكسور الموجودة تحت علامة الجذر الى ذات مقام واحد بان يضرب حد الكسر $\frac{٣٦٠}{٢٢}$ في ٢٢ ثم يضم الكسر الموجودان تحت العلامة المذكورة الى بعضهما

$$\text{فيصير} \quad \text{ر٢ر} = \frac{١ + ٢٢ \times ٣٦٠}{٢٢} + \frac{١}{٢٢}$$

فاذا اجريت عملية حساب $٢٢ \times ٣٦٠ + ١$ واخرج العدد (٢٢) من تحت علامة الجذر ولوحظ ان العدد ٢٢ هو المقام المشترك فيصير

$$\text{ر٢ر} = \frac{\sqrt{٧٩٢١}}{٢٢} + \frac{١}{٢٢}$$

وحيث أن الجذر التربيعي للعدد ٧٩٢١ هو ٨٩ يكون

$$= \text{ر٢ر}$$

•(٩٧)•

سنة $\frac{89+1}{22}$ واذا وضع كل من جذرى المجهول منه على
 حده يحدث

$$سنة = \frac{88}{22} = \frac{89+1}{22} =$$

$$\frac{20}{11} = \frac{90}{22} = \frac{89-1}{22} =$$

•(في المقائلات العمومية للمعادلات ذات الدرجة الثانية)•

(٧٢) قد تقدم في حل معادلة تأمة ذات درجة ثانية ان كل معادلة من هذا
 القبيل لها جذران وبرهان ذلك ايضا ان يقال كل معادلة تأمة ذات درجة ثانية
 كالمعادلة $سنة + ح سنة + ك = ٠$ يمكن وضعها بهذه الصورة
 $سنة + ح سنة + ك = \frac{ع}{4} = \frac{ع}{4} - ك$ بتحويل الحد المعلوم ك الى
 الطرف الثانى وازافة $\frac{ع}{4}$ الى كل من الطرفين فاذا لوحظ ان الطرف
 الاول $سنة + ح سنة + ك$ مساو $\left(\frac{ع}{4} + ح سنة + ك\right)$ وان الطرف الثانى
 $\frac{ع}{4} - ك$ مساو $\left(\frac{ع}{4} - ك\right)$ ووضع هذان المقداران في المعادلة
 المتقدمة وحول ما كان في الطرف الثانى الى الاول حدث

$$= \left(\frac{ع}{4} + ح سنة + ك\right) - \left(\frac{ع}{4} - ك\right)$$

وحيث أن الطرف الاول مساو لفاضل مربعين يكون مساويا لحاصل ضرب
 مجموع جذريهما في فاضلهما اى مساويا

$$= \left(\frac{ع}{4} + ح سنة + ك\right) \left(\frac{ع}{4} - ك\right) - \frac{ع}{4} + ح سنة + ك$$

فحيث أن الطرف الاول الذى هو حاصل ضرب مساو للطرف الثانى أى الصفر
 يلزم أن يكون أحد مصروبيه مساويا للصفر وحيث انه محتوم على مضروبين
 تكون المعادلة متحققة بجزء كليهما مساويا للصفر

•(٩٨)•



$$م = \frac{c}{r} + \sqrt{k - \frac{c^2}{r^2}} \quad ; \quad و$$

$$م = \frac{c}{r} - \sqrt{k - \frac{c^2}{r^2}} \quad ; \quad و$$

ويستخرج من ذلك مقدار المجهول م وهما عتبتا المقدارين المعلومين سابقا وهذا يثبت ان كل معادلة تامة بدرجة ثانية لها جذران فقط -

• (تنبيه) •

ينتج من مقارنة المعادلة

$$= \left(\sqrt{k - \frac{c^2}{r^2}} - \frac{c}{r} + م \right) \left(\sqrt{k - \frac{c^2}{r^2}} + \frac{c}{r} + م \right)$$

يجد جذري المجهول م أن الطرف الاول من معادلة ذات درجة ثانية بهذه

الصورة $م^2 + ح م + ك = ٠$ يكون مركبا من حاصل ضرب كيتين كتماهما ذات حدين ومحتوية على المجهول م بدرجة اولى فالجذران الاقوان منهما يكونان م والاخيران منهما يكونان جذري م مأخوذين بعلامتين متخالفتين

وينتج من هذه الخاصية طريقة تركيب معادلة ذات درجة ثانية بعدمعرفة جذريها هي انه لتركيب معادلة بدرجة ثانية بعدمعرفة جذريها ٢ و - ٥ يجعل حاصل ضرب الكيتين ذاتي الحدين م - ٢ و م + ٥

مساويا لصفر فيحدث $م^2 + ٣ م - ١٠ = ٠$ وهي المعادلة المطلوبة فاذا حلت هذه المعادلة تحصل عدد ٢ و - ٥ وهما جذراها

(٧٣) بحيث أن كل جذري معادلة عامة بدرجة ثانية على هذه الصورة

$$م = \frac{c}{r} + \sqrt{k - \frac{c^2}{r^2}} \quad و \quad م = \frac{c}{r} - \sqrt{k - \frac{c^2}{r^2}}$$

يحدث بجمعهما على بعضهما

سـ + سـ = سـ - سـ = سـ - سـ = سـ
 أعني أن حاصل جمع جذري معادلة بدرجة ثانية مساويا لـ هو الحد الثاني
 بعلامة مخالفة لعلامة

وإذا ضرب الجذران المذكوران في بعضهما يحدث

$$\left(\sqrt{\frac{2}{4}} - \frac{2}{4}\right) \left(\sqrt{\frac{2}{4}} + \frac{2}{4}\right) = سـ + سـ = سـ$$

$$سـ = سـ + \frac{2}{4} - \frac{2}{4} = \left(\sqrt{\frac{2}{4}}\right)^2 - \left(\frac{2}{4}\right)^2 =$$

أعني أن حاصل ضرب جذري معادلة بدرجة ثانية يساوي حدها المعلوم
 بعلامة مخالفة لعلامة أن كان في الطرف الثاني أو بعلامة أن كان
 في الطرف الأول

• (تنبيه) •

يتبع من هاتين الخاصيتين طريقة تركيب معادلة بعد معرفة جذريها
 فإذا فرض مثلا أن المطلوب تحصيل معادلة ذات درجة ثانية جذراها
 ٢ و ٥ كان حاصل جمع الجذرين المذكورين المأخوذ بعلامة مخالفة
 لعلامة مساويا ٣ وحاصل ضربهما مساويا ١٠ وتكون المعادلة

$$المطلوبة سـ + سـ = ٣ سـ = ١٠$$

$$(٧٤) \sqrt{\frac{2}{4}} + \frac{2}{4} = سـ \text{ المساويان } \sqrt{\frac{2}{4}} - \frac{2}{4} \text{ والمحتويان}$$

على علامة الجذر يكونان تخيلين متى كانت الكمية $\frac{2}{4} - سـ$ الموضوع
 تحت علامة الجذر سالبة وحيث أن $\frac{2}{4}$ مربع كامل تكون علامته موجبة
 دائما وعلامة $\frac{2}{4} - سـ$ لا تتعلق حينئذ بالعلامة لـ من المعادلة

$$سـ + سـ = سـ + لـ = ٠ \text{ وبمقدارى حـ و لـ}$$

فاذا كان $\frac{1}{2}$ اصغر من صفر أو سالباً يكون $\frac{1}{2}$ موجباً ويكون

أيضاً $\frac{1}{2}$ — $\frac{1}{2}$ موجباً ويكون الجذران حقيقيين غير متساويين
وإذا كان $\frac{1}{2}$ مساوياً للصفر آلت الكمية الموضوعة تحت علامة الجذر إلى

$\frac{1}{2}$ وكان الجذران حينئذ حقيقيين

وإذا كان $\frac{1}{2}$ موجباً يكون — $\frac{1}{2}$ سالباً وتكون الكمية التي تحت

علامة الجذر $\frac{1}{2}$ — $\frac{1}{2}$ مركبة من كمية موجبة وكمية سالبة فعلاقة

الجذر تتعلق بالتقدير المدسوبة لهاتين الكميتين فاذا كان $\frac{1}{2}$ اصغر من $\frac{1}{2}$

كانت الكمية ذات الحدين $\frac{1}{2}$ — $\frac{1}{2}$ موجبة والجذران حقيقيين غير

متساويين

وإذا كان $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ كانت الكمية ذات الحدين التي تحت علامة الجذر

مساوية للصفر والجذران حينئذ حقيقيين ومتساويين وإذا كان $\frac{1}{2}$ أكبر من

$\frac{1}{2}$ كانت الكمية ذات الحدين $\frac{1}{2}$ — $\frac{1}{2}$ سالبة والجذران تخيلين وهالك

جدول السامع هذه المناقشة

$\frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ يكون الجذران حقيقيين وغير متساويين

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ يكون الجذران حقيقيين وغير متساويين

$\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ يكون الجذران حقيقيين وغير متساويين

$\frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ وكان $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ يكون الجذران حقيقيين ومتساويين

$\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ يكون الجذران تخيلين

إذا كان

(٧٥) يمكن من أول الأمر ادراك علامتي جذري معادلة بهذه الصورة

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ وذلك مؤسس على الخاصيتين

منه

بـ = كـ و مـ + مـ = حـ و بيان ذلك أن يقال
 أولا إذا كان كـ أصغر من صفراً وسالباً تكون علامتا الجذرين متخالفتين
 لأن حاصل ضربهما سالب وعلامة الأكبرهما مخالفة لعلامة حـ حيث كان
 حاصل جمعهما مساوياً حـ

وثانيا إذا كان كـ مساوياً لصفري يكون أحد الجذرين مساوياً للآخر لأن
 حاصل ضربهما عديم ويكون الآخر مساوياً بالكرر حـ بعلامة مخالفة لعلامته
 وثالثا إذا كان كـ أكبر من صفراً وموجباً يكون الجذرين علامة واحدة
 حيث كان حاصل ضربهما موجباً وتكون علامتهما مخالفة أيضاً لعلامة
 حـ ويمكن استنتاج ذلك من المقدارين

$$مـ = -\frac{ح}{٢} + \sqrt{\frac{ح^2}{٤} - كـ} \quad و \quad مـ = -\frac{ح}{٢} - \sqrt{\frac{ح^2}{٤} - كـ}$$

وهالك جدولاً يحتوي على النتائج الحادثة من المناقشة المتقدمة

كـ > ٠ . تكون علامتا الجذرين حـ > ٠ . كان الأكبرهما موجبا	}	إذا كان
متخالفتين لكن إن كان حـ < ٠ . كان الأكبرهما سالباً		
كـ = ٠ . يكون أحد الجذرين صفراً والآخر مساوياً حـ	}	إذا كان
كـ < ٠ . تكون علامتا الجذرين حـ > ٠ . يكون الجذران موجبين		
متحدتين لكن إن كان حـ < ٠ . يكون الجذران سالبين	}	إذا كان

(٧٦) لم يبق علينا الآن فتحص بعض حالات خاصة فنقول
 أولاً قد شوهد فيما تقدم في الحالة التي كان فيها كـ أكبر من صفراً ومساوياً
 حـ أن الجذرين متساويان وذلك بمقتضى قانون

$$مـ = -\frac{ح}{٢} \pm \sqrt{\frac{ح^2}{٤} - كـ} \quad لكن يمكن الرهنة على ذلك من أول الامر$$

بان يوضع في المعادلة مـ + حـ مـ + كـ = ٠ بدل كـ مقداره

قتصر $س$ + $ح$ + $س$ = $\frac{ع}{٢}$. وهي معادلة يمكن وضعها بهذا

الصورة $(س + ح) = \frac{ع}{٢}$. ومنها يحدث

$$. = (س + ح) (\frac{ع}{٢} + س)$$

وهي معادلة تتحقق بالفرضين $س = \frac{ع}{٢}$ و $س + ح = \frac{ع}{٢}$.

المتطابقين ومنها يستخرج الجذران $س = \frac{ع}{٢}$ و $س - ح = \frac{ع}{٢}$ المتساويان .

وثانيا قد شوهد فيما تقدم في الحالة التي صكان فيها $ك = .$ أن أحدهما الجذرين مساو صفر والآخر مساو $ح$ ويمكن حدوث ذلك من القانون

$$س = \frac{ع}{٢} \pm \sqrt{\frac{ع}{٢} - ك}$$

بـ $س = ك$ و $س + ح = س$. لكن يمكن استنتاج ذلك

من اول الامر من المعادلة $س + ح + س = ك$. لانه اذا فرض

فيها $ك = .$ تقول الى $س = ح + س$. واذا وضع فيها $س$

مضروباً مشتركاً آلت الى $س (س + ح) = .$ وهي معادلة تتحقق

بالفرضين $س = .$ و $س + ح = .$ اللذين يستخرج منهما

$$س = . \text{ و } س - ح = .$$

ونالنا اذا فرض $ح = .$ في القانون $س = \frac{ع}{٢} \pm \sqrt{\frac{ع}{٢} - ك}$

آلت الى $س = \frac{ع}{٢} \pm \sqrt{\frac{ع}{٢} - ك}$ اعني أن جذري المجهول $س$ يكونان

متساويين ومتخالفين في العلامة لكن يمكن استنتاج ذلك من المعادلة

$س + ح + س = ك$. التي نزل في هذه الحالة الى معادلة غير نامية

بهذه الصورة

$$س + ح = ك \text{ . ومنها يستخرج } س = \frac{ع}{٢} \pm \sqrt{\frac{ع}{٢} - ك}$$

ورابعا اذا فرض أن $ك = ٠$ و $ح = ٠$ في ان واحد في القانون

$$سم = ٠ - \frac{ح}{٢} + \sqrt{\frac{ح^2}{٤} - ك} \text{ أو في الارتباطين}$$

$$سم + سم' = ٠ - ح \text{ و } سم - سم' = ك \text{ أو في المعادلة}$$

$$سم + ح + سم = ك = ٠ \text{ يكون جذرا المجهول سم مساوئين}$$

لصفر

(٧٧) ولنطبق القواعد العمومية على مناقشة بعض امثلة خصوصية
فبقول

المثال الاول اذا فرضت معادلة $٢ سم + سم - ٢ = ٠$ وقسم
طرفاها على مكرر $سم$ التالى

$$٠ = \frac{٢}{٢} - \frac{سم}{٢} + \frac{سم}{٢}$$

وحيث ان الحد المعلوم سالب فالجذران يكونان حقيقيين غير متساويين
وبناء عليه يكونان متخالفين في العلامة لان حاصل ضربهما يكون سالبا
وايضاح حيث كان مكرر الحد الثانى موجبا يكون حاصل جمع الجذرين سالبا
وبناء عليه يكون اكبرهما سالبا فحينئذ جذرا هذه المعادلة يكونان حقيقيين
غير متساويين ومتخالفين لعلامة واكبرهما سالبا

ولتحقيق ذلك يستخرج مقدارا المجهول $سم$ من المعادلة المعلومة
فيعلى

$$\frac{٢٥ \sqrt{١} + ١}{٦} = \frac{٢٤ + ١ \sqrt{١} + ١}{٦} = \frac{٢ + ١}{٢ + ٣٦} + \frac{١}{٦} - = سم$$

$$= \frac{٥ + ١}{٦} \text{ ومه يستخرج}$$

$$سم = \frac{٥ + ١}{٦} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣} \text{ و } سم' = \frac{٥ - ١}{٦} = ١ -$$

المثال الثاني اذا فرضت معادلة $٦س^٢ - ٥س + ١ = ٠$

وقسمت حد ودها على ٦ آلت الى $س^٢ - ٥س + ١ = ٠$
 وحيث أن الحد المعلوم موجب يلزم مقارنته بربع نصف مكرر الحد الثاني
 أعنى مربع $\frac{٥}{١٢}$ ومن حيث أن مربع $\frac{٥}{١٢}$ يساوى $\frac{٢٥}{١٤٤}$ يلزم مقارنة
 كسرى $\frac{٢٥}{١٤٤}$ و $\frac{١}{٦}$ بأن يضرب هذا الكسر $\frac{١}{٦}$ فى ٢٤ فيقول الى
 $\frac{٢٤}{١٤٤}$ وحيث أن الكسر $\frac{٢٤}{١٤٤}$ أصغر من $\frac{٢٥}{١٤٤}$ أى أن الحد المعلوم أصغر من
 مربع نصف مكرر الحد الثاني يكون جذرا المعادلة حقيقين غير متساويين
 ومن حيث أن حاصل ضربهما موجب وهو $\frac{١}{٦}$ يكونان متحددان فى العلامة
 ومن حيث أن حاصل جمعهما وهو $\frac{٥}{٦}$ موجب ايضا يكونان موجبين فينتد
 يكون الجذران حقيقين موجبين وغير متساويين لانه من القانون

$$\frac{١ \pm ٥}{١٢} = \frac{\sqrt{٢٤ - ٢٥} \pm ٥}{١٢} = \frac{١}{٦} - \frac{٢٥}{١٤٤} \left| \pm \frac{٥}{١٢} = س \right.$$

يحدث

$$س^٢ = \frac{١+٥}{١٢} = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢} \text{ و } س^٢ = \frac{١-٥}{١٢} = \frac{-٤}{١٢} = \frac{-١}{٣}$$

المثال الثالث اذا فرضت معادلة $س^٢ + ١٤س + ٤٩ = ٠$

وقورن حدها المعلوم الموجب المساوى ٤٩ بمربع نصف مكرر الحد
 الثانى أى مربع ٧ يكون ٤٩ مساويا لهذا المربع فاذن يكون
 الجذران حقيقين ومتساويين وكل منهما مساويا لنصف مكرر الحد الثانى
 يعالمة مخالفة لعلامته أعنى أن كل جذريكون مساويا -٧ لان

$$س^٢ = -٧ = \sqrt{٤٩ - ٤٩} \left| س = -٧ \right.$$

المثال الرابع اذا فرضت معادلة $س^٢ + ٧س + \frac{٢}{٢} = ٠$ وقورن

حدها المعلوم $\frac{٢}{٢}$ بمربع نصف مكرر الحد الثانى أعنى $\frac{٢}{٢}$ يكون

اكثر

$$\text{أكبر من } \frac{5}{2} \text{ ويكون جذرا المعادلة تحيلين لان}$$

$$\frac{5-7\pm 7}{2} = \frac{5^2-7\pm 7}{2} = \frac{5}{2} \pm \frac{7}{2} \left| \pm \frac{7}{2} = \frac{(5-7\pm 1)7}{2} =$$

(٧٨) قد تقدم انه يجب حل معادلة بمعادلة $س^2 + دس + هـ = ٠$

أن تقسم جميع حدودها على $د$ فيحدث $س^2 + دس + هـ = ٠$
 وأن يختصر الحساب بفرض $\frac{د}{2} = ع$ و $\frac{هـ}{2} = ك$ فلاريد الآن
 حل المعادلة المذكورة بدون اجراء هذا الفرض حول $\frac{د}{2}$ الى الطرف

الثاني فيحدث $س^2 + دس = -\frac{هـ}{2}$ ولتقيم مربع الطرف الاول
 يضاف لكل من طرفيها مربع نصف $\frac{د}{2}$ فيحدث

$$س^2 + دس + \frac{د^2}{4} = \frac{د^2}{4} - \frac{هـ}{2} = \frac{د^2}{4} + \frac{دس}{2} + \frac{س^2}{2}$$

وباخذ جذر كل من الطرفين فيحدث

$$س + \frac{د}{2} = \pm \sqrt{\frac{د^2}{4} - \frac{هـ}{2}} \text{ ومنها يحدث}$$

$$س = -\frac{د}{2} \pm \sqrt{\frac{د^2}{4} - \frac{هـ}{2}}$$

فادار من جذري المجهول $س$ بالرمزين $س$ و $س'$ يحدث

$$س = -\frac{د}{2} + \sqrt{\frac{د^2}{4} - \frac{هـ}{2}} \text{ و } س' = -\frac{د}{2} - \sqrt{\frac{د^2}{4} - \frac{هـ}{2}}$$

(٧٩) ولختبر ما يؤل اليه هذان المقداران حين يفرض فيهما المكرر $د$
 مساويا للصفر فيحدث بناء عليه

$$س = -\frac{د}{2} = -\frac{س}{2} = س' \text{ و } س = -\frac{د}{2} = -\frac{س}{2} = س'$$

أعني أن مقدار \bar{m} يكون لانهاية \bar{m} ومقدار \bar{m} الذي بهذه الصورة :-
يدل على أنه غير معين لكن استنتاج هذا المقدار في هذه الحالة حاد من
وجود مضروب مشترك لحدي الكسر

$$\frac{\bar{m} + \sqrt{\bar{m}^2 - 4}}{2} \text{ ولتعيين هذا المضروب يضرب حد الكسر في } \frac{\bar{m} - \sqrt{\bar{m}^2 - 4}}{2}$$

$$= \frac{(\bar{m} + \sqrt{\bar{m}^2 - 4})(\bar{m} - \sqrt{\bar{m}^2 - 4})}{(\bar{m} - \sqrt{\bar{m}^2 - 4})^2} = \bar{m}$$

وحيث أن كلام من حدى هذا الكسر الأخير يمثل القسمة على ٢ يكون
٢ هو المضروب المشترك ويحذف بعد حذفه

$$\frac{\bar{m}^2}{\bar{m} - \sqrt{\bar{m}^2 - 4}} = \bar{m}$$

فادافرض الآن $\bar{m} = 0$ ينتج

$$\bar{m} = \frac{\bar{m}^2}{\bar{m} - \sqrt{\bar{m}^2 - 4}} = \frac{\bar{m}^2}{\bar{m} - \sqrt{\bar{m}^2 - 4}} \text{ أى } \bar{m} = \frac{\bar{m}^2}{\bar{m} - \sqrt{\bar{m}^2 - 4}}$$

وأما مقدار \bar{m} فهو لانهاية \bar{m} لأنه بفرض $\bar{m} = 0$ تؤل المعادلة

$$\bar{m} + \bar{m} + \bar{m} = 0 \text{ الى معادلة ذات درجة أولى } \bar{m} + \bar{m} + \bar{m} = 0$$

لا تتحقق الا بمقدار واحد وهو $\bar{m} = 0$ وحيث ثبت ان مقدار

\bar{m} معين ينتج من ذلك أن مقدار \bar{m} لانهاية

(في مسائل الدرجة الثانية)

(المسئلة الاولى)

(٨٠) ما هو العدد القاسم ٣٦ بحيث يكون خارج القسمة رائدا

المقسوم عليه مساويا ١

فالجواب ان يفرض ان العدد المجهول مرة تفارح فسمه ٣٦ على ٠ مرة
يكون هكذا $\frac{٣٦}{٢}$ فاذن تحدث هذه المعادلة $\frac{٣٦}{٢} + م = ١٥$
ومنها يحدث $٣٦ \div ٢ = ١٥ - م$ أو $١٥ - م = ٣٦ \div ٢$
ومنها يحدث

$$\frac{٩+١٥}{٢} = \frac{١٤٤-٢٢٥}{٢} \sqrt{\frac{٩+١٥}{٢}} = ٣٦ - \frac{٢٢٥}{٢} \sqrt{\frac{٩+١٥}{٢}} = م$$

فاذن يكون مقدارا م هكذا

$$٣ = \frac{٩-١٥}{٢} = م \text{ و } ١٢ = \frac{٩+١٥}{٢}$$

فكل من مقداري م = ١٢ و م = ٣ يحقق منطوق المسئلة

•(المسئلة الثانية)•

(٨١) اذا كان المطلوب تقسيم ٠ الى جريئين يكون احدهما وسطا
هندسيا بين ٠ الكلي والجزء الآخر يقال
لحل ذلك يرمز بالحرف م الجزء الذي يكون وسطا متناسبا فيكون
الجزء الآخر مساويا ٠ م فاذن يكون

$$٠ : م :: م : ٠ - م \text{ ومنه يحدث}$$

$$٠ م = م^2 - ٠ م \text{ أو } ٠$$

$$٠ م + م م - ٠ = ٠ \text{ ومنها يحدث}$$

$$\frac{٥ \sqrt{٠+٠} - ١٥}{١٥} = \frac{٢٥ \sqrt{٠+٠} - ٢٥}{٢} = \frac{٢}{٠+٠} \sqrt{\frac{٠+٠}{٢}} = م$$

فاذن يكون مقدارا م هكذا

$$\frac{(٥ \sqrt{٠+١}) - ١}{٢} = \frac{٥ \sqrt{٠+٠} - ١}{٢} = م$$

$$\frac{(٥ \sqrt{٠+١}) - ١}{٢} = \frac{٥ \sqrt{٠+٠} - ١}{٢} = م$$

مقدار م يلقى بطوق المسئلة وأما مقدار م فغير لائق به لانه مقدار

(١٠٨)

سأبقي قطع النظر عنه في هذا يذكرن المسئلة حل واحد هو

$$\frac{(57+1) \div 4}{4} = \text{سـ}$$

(تنبيهان)

لأول مقدار سـ = $\frac{(57+1) \div 4}{4}$ سيكون أصم مهما كل
لأن اجراء عملية الحساب على عدد مخصوص لا يوصل الى مقدار صحيح
للجهول سـ

الثاني قد استخرج فيما تقدم من المعادلة ذات الدرجة الثانية الجدران

$$\text{سـ} = \frac{(57+1) \div 4}{4} \text{ و } \text{سـ} = \frac{(57+1) \div 4}{4}$$

اللذان يكون كل منهما محققا للمعادلة غير أن أحدهما يلقى عطوق المسئلة
المعروضة ويؤخر من ذلك أن هذه المعادلة كناية عن مسئلة تكون المسئلة التي
حلت سابقا حالة خصوصية منها ومطوقها هكذا

المطلوب إيجاد عددين حاصل جمعهما مساو ٥ واحد هما وسط هـ دسـ
بين الآخر و ٥

فأدار من الحرف سـ لأحد العددين المجهولين الذي هو كناية عن الوسط
الهندسي توصل الى هذه المعادلة

$$\text{سـ} + \text{سـ} - \text{سـ} = ٥$$

التي حذرنا السالب يكون موافقا لمطوق المسئلة كحذرنا الموجب

(المسئلة الثالثة)

(٨٢) المطلوب كناية عدد ٣١٧ في جملة تعدادية بحيث تكون ارقامه

٦ و ٣ و ٢

فيصرص أن سـ رمز الأساس المجهول للجملة فالسنة آحاد من الرتبة

الثالثة للعدد المعروض تكافى ٦ سـ والثلاثة آحاد من الرتبة الثانية

تكافى ٣ سـ فالعدد المعلوم يكافى

٦ سـ

(١٠٩)

٦ س + ٣ س + ٢ وبناء عليه يحدث هذه المعادلة

$$٦ س + ٣ س + ٢ = ٣١٧٥ \text{ أو}$$

$$٦ س + ٣ س - ٣١٥ = ٠ \text{ أو}$$

$$٦ س + ٣ س - \frac{١٠٥}{٢} = ٠ \text{ ومنها يستقرح}$$

$$٦ س + ٣ س - \frac{١٠٥}{٢} = ٠ \Rightarrow \frac{٢٩ \pm ١ -}{٢} = \frac{٨٤ \pm ١}{٢} \Rightarrow \frac{١٠٥}{٢} + \frac{١}{٢} \left(\pm \frac{١}{٢} - \right) =$$

ومقدارا س يكونان

$$\frac{١٠٥}{٢} = \frac{٢٩ - ١ -}{٢} = س \text{ و } ٧ = \frac{٢٨}{٢} = \frac{٢٩ + ١ -}{٢} = س$$

فيقطع النظر عن المقدار س = $\frac{١٠٥}{٢}$ لان اساس الجلة التعدادية

لا يكون سالبا ولا يوافق المسئلة فاذن يكتفى بجدرها الموجب

(المسئلة الرابعة)

(٨٣) اذا كان المطلوب تقسيم العدد ١٠ الى حريين حاصل ضربهما

يساوى ٢٨ فالجواب أن يقال

لحل هذه المسئلة توضع على هيئة معادلة كالعادة لكن بتدكر أن حاصل جمع

جذرى معادلة ذات درجة ثانية يكون مساويا لمكرر الحد الثاني بعلامة مخالفة

لعلامته وأن حاصل ضربهما يساوى مساويا للحد المعلوم يكون العددان

المطلوبان جذرى معادلة ذات درجة ثانية مكر رحتها الثانى مساوى - ١٠

والحد المعلوم مساو ٢٨ فتكون المعادلة هكذا

$$س^٢ - ١٠ س + ٢٨ = ٠$$

فقدرا هذه المعادلة يكونان تخيلين لان الحد المعلوم موجب واكر من مربع

نصف ١٠ فيثبت تكون المسئلة المفروضة عبر عكسة الحل

ولما قسمة هذه المسئلة بطريقة عامة وبيان احوالها الممكنة وغير الممكنة

(٢٠٠)

يفرض أن γ رمز للعدد الذي يراد تقسيمه وان m رمز لحاصل ضرب
جزئيه فيكون العددان المجهولان مبنيين بجذري المعادلة

$$m^2 - \gamma m + \gamma^2 = 0$$

التي يستخرج منها $m = \frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \gamma^2}$ و $m = \frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \gamma^2}$

فإذا كان $m < \frac{\gamma}{2}$ كان هذان المقدران تخيليين فحينئذ تكون المسئلة غير
ممكنة الحل

وإذا كان $m = \frac{\gamma}{2}$ كان هذان الحدان حقيقيين وكل منهما مساويا $\frac{\gamma}{2}$
أعني أن عدد γ يكون مقسوما في هذه الحالة قسمين متساويين

وإذا كان $m > \frac{\gamma}{2}$ كان هذان المقداران حقيقيين غير متساويين ويصغر

الفرق بينهما المساوي $\frac{\gamma}{2}$ كلما كبر مقدار m وينتج من ذلك
نتائج هي

أنه متى قسم العدد إلى قسمين مختلفين وضربا في بعضهما كان حاصل الضرب
أكبر من العدد المذکور حين يكون الفرق بين الجزئين المختلفين قليلا ويكون
هذا الحاصل أكبر ما يكون متى كان الجزآن المختلفان متساويين أعني متى
انقسم العدد المذکور إلى قسمين متساويين

(المسئلة الخامسة)

(٨٤) صوّان موضوعان أحدهما في النقطة a والاخر في b
ومرموز للعدد a الكلث بينهما بالحرف x ولشدة الصوت a بالحرف
 m ولشدة الآخر الكلث في b بالحرف n والمطلوب تعيين النقطة
الكائنة على المستقيم ab التي فيها نور الضوئين واحد وحيث فرضنا
 m و n رمزين لشدة الضوئين بالنسبة لوحدة العدد k أيضا قاعدة
معروفة هي أن شدة صوت واحد واقع في نقطتين على ابعاد غير متساوية

يستخرج من اول الامر جذر طرفيها فيجد

$$\begin{aligned} \frac{\overline{م\gamma} \pm \overline{م\gamma}}{\overline{م\gamma} \pm \overline{م\gamma}} &= \frac{\overline{م\gamma}}{\overline{م\gamma}} \text{ أو } \\ \overline{م\gamma} \pm \overline{م\gamma} &= \overline{م\gamma} \pm \overline{م\gamma} \text{ أو } \\ \overline{م\gamma} \pm \overline{م\gamma} &= \overline{م\gamma} \pm \overline{م\gamma} \text{ أو } \\ \frac{\overline{م\gamma}}{\overline{م\gamma} \pm \overline{م\gamma}} &= \overline{م\gamma} \end{aligned}$$

فاذا استخرج منها مقداراً من $\overline{م\gamma}$ يكونان بهذه الكيفية

$$(٢) \dots\dots\dots \left\{ \begin{aligned} \frac{\overline{م\gamma}}{\overline{م\gamma} \pm \overline{م\gamma}} &= \overline{م\gamma} \\ \frac{\overline{م\gamma}}{\overline{م\gamma} \pm \overline{م\gamma}} &= \overline{م\gamma} \end{aligned} \right. \text{ و}$$

ويسهل حساب العدد $\overline{م\gamma}$ أعني $\overline{م\gamma}$ بل يقال

$$\frac{\overline{م\gamma} \pm \overline{م\gamma}}{\overline{م\gamma} \pm \overline{م\gamma}} = \frac{\overline{م\gamma} \pm \overline{م\gamma}}{\overline{م\gamma} \pm \overline{م\gamma}} = \frac{\overline{م\gamma}}{\overline{م\gamma} \pm \overline{م\gamma}}$$

ولتعيين مقداري $\overline{م\gamma}$ و $\overline{م\gamma}$ نؤخذ العلامتان العلويتان أو السفليتان فاذن يكون

$$\frac{\overline{م\gamma}}{\overline{م\gamma} \pm \overline{م\gamma}} = \overline{م\gamma} \text{ و } \frac{\overline{م\gamma}}{\overline{م\gamma} \pm \overline{م\gamma}} = \overline{م\gamma}$$

وتكون جلتا مقداري مجهولي $\overline{م\gamma}$ و $\overline{م\gamma}$ من هكذا

$$\begin{aligned} \frac{\overline{م\gamma}}{\overline{م\gamma} \pm \overline{م\gamma}} &= \overline{م\gamma} \text{ و } \frac{\overline{م\gamma}}{\overline{م\gamma} \pm \overline{م\gamma}} = \overline{م\gamma} \\ \frac{\overline{م\gamma}}{\overline{م\gamma} \pm \overline{م\gamma}} &= \overline{م\gamma} \text{ و } \frac{\overline{م\gamma}}{\overline{م\gamma} \pm \overline{م\gamma}} = \overline{م\gamma} \end{aligned}$$

* (تلييه) *

صورة مقدراري $\overline{م\gamma}$ و $\overline{م\gamma}$ المبينين بمعادلتى (٢) ليست كصورة مقدرارى (١) الحالى من الحل الاول ومع ذلك فهذان المقداران عينا

الاولين وبرهان ذلك ان يغير في بسط $\frac{(2\bar{m} + \bar{m})}{2 - \bar{m}}$ المقدار \bar{m}
 بالمقدار $\bar{m} \times \bar{m} \times \bar{m}$ ثم يوضع \bar{m} مضروباً مشتركاً فيؤل الى

$$\frac{(2\bar{m} + \bar{m})\bar{m}^3}{2 - \bar{m}} = \bar{m}$$

فاذا اعتبر مقداراً \bar{m} و \bar{m} مربعي مقداري \bar{m} و $2\bar{m}$ يكون المقام
 مكوناً من فاصل مربعين فاذن يكون

$$\frac{\bar{m}^3}{2\bar{m} - \bar{m}} = \frac{(2\bar{m} + \bar{m})\bar{m}^3}{(2\bar{m} - \bar{m})(2\bar{m} + \bar{m})} = \bar{m}$$

وهو مقدار مساوٍ للمقدار \bar{m} المستخرج بالحل الثاني ومثل هذا يقال
 في اثبات تساوي المقدارين الآخرين

(مناقشات)

الاولى اذا فرض ان $\bar{m} < 2$ يكون مقدار $\frac{\bar{m}^3}{2\bar{m} + \bar{m}} =$
 موجبا واكبر من $\frac{1}{2}$ لان المقام $2\bar{m} + \bar{m} < 2$ اصغر من $2\bar{m}^2$

لان $\bar{m} < 2$ فاذن يكون الكسر $\frac{\bar{m}^3}{2\bar{m} + \bar{m}}$ اكبر من الكسر

$\frac{\bar{m}^3}{2\bar{m}^2}$ أو من $\frac{1}{2}$ ويكون مقدار $\bar{m} - \bar{m}$ المطابق لمقدار \bar{m}

موجبا ايضا غير انه اصغر من $\frac{1}{2}$ فاذن توجد نقطة كقطة γ مستوية
 بنور واحد من الضوئين α و β وتكون اقرب الى β من γ وهذا
 يوافق فرض $\bar{m} < 2$

ومقدار $\bar{m} = \frac{\bar{m}^3}{2\bar{m} - \bar{m}}$ يكون موجبا ايضا حيث ان $\bar{m} < 2$

ويكون اكبر من \bar{m} لان المقام $2\bar{m} - \bar{m} < 2\bar{m}$ اصغر من $2\bar{m}$ فاذن

يكون الكسر $\frac{\bar{m}^3}{2\bar{m} - \bar{m}}$ اكبر من $\frac{\bar{m}^3}{2\bar{m}}$ أو من \bar{m} ومقدار

و - س = س = $\frac{2\gamma - 2\gamma}{2\gamma - 2\gamma}$ المطابق للاول يكون سالبالان بسطه سالب

ومقامه موجب أو يقال حيث أن س أكبر من ٠ فيكون و - س = س

بالضرورة سالفاذن يوجد على المستقيم ا - نقطة ثانية و مستتيرة

بنور واحد من الصوتين المفروضين وتكون على عين النقطة - لان بعدها

عن ا أكبر من و وهذا الناتج يوافق ايضا م < ٥

الثانية اذا فرض أن م > ٥ يكون مقدار س = $\frac{2\gamma}{2\gamma + 2\gamma}$

موجبا عيرانه بواسطة رهان كالتقدم في الحالة السابقة يبرهن على أن س

يكون أصغر من $\frac{1}{2}$ وان المقدار المطابق له وهو و - س = $\frac{2\gamma}{2\gamma + 2\gamma}$

موجبا وا أكبر من $\frac{1}{2}$ فاذن تكون النقطة الاولى مستتيرة بنور واحد من

الصوتين الموضوعين في القطعين ا و - واقرب الى النقطة ا من

- وهذا يوافق فرض م > ٥

س - ا - و - س

والمقدار الثاني وهو س = $\frac{2\gamma}{2\gamma - 2\gamma}$ يكون سالبالان بسطه

موجب ومقامه سالب وتوضيح هذا المقدار كما في النوع الثاني من رابند

(٤٧) يغير في المعادلة

$\frac{2}{2} = \frac{2}{2}$ علامة س فتؤول الى $\frac{2}{2} = \frac{2}{2}$ لانه

بالعونة عن هذه المعادلة يتوصل الى منطوق المسئلة المفروضة بدون تعيير

عير ان هذه المعادلة يعلم بها ان النقطة المستتيرة بنور واحد من الصوتين يكون

بعدها عن النقطة - ا أكبر من و حيث ان يكون النقطة الثانية و

المستتيرة

المستقيمة بنور واحد من الصوتين على يسار النقطة ١ وبعدها عنها مينا

بمقدار سالب هو \bar{m} لان جذرى المعادلة المغيرة عين
جذرى المعادلة المقروضة وأما المقدار المطابق لمقدار \bar{m}
وهو

$$s - \bar{m} = \frac{\bar{m}^2 s - \bar{m}}{\bar{m}^2 s - \bar{m}} \text{ فيمكن وضعه بهذه الصورة}$$

$$s - \bar{m} = \frac{\bar{m}^2 s}{\bar{m}^2 s - \bar{m}}$$

وحينئذ تسهل البرهنة على انه موجب واكبر من s وهذا الناتج يوافق
وضع النقطة \bar{m} المعين سابقا وفرض $m > s$
الثالثة اذا فرض أن $m = s$ كان مقدارا

$\bar{m} = \frac{\bar{m}^2 s}{\bar{m}^2 s + \bar{m}}$ و $s - \bar{m} = \frac{\bar{m}^2 s}{\bar{m}^2 s + \bar{m}}$ موجبين
ومساويا لكل منهما $\frac{s}{2}$ وكانت النقطة الاولى المستقيمة بنور واحد من
الصوتين على بعدين متساويين من القطين ١ و s وهذا الناتج يوافق
فرض $m = s$

وأما المقداران الآخران اللذان هما

$\bar{m} = \frac{\bar{m}^2 s}{\bar{m}^2 s - \bar{m}}$ و $s - \bar{m} = \frac{\bar{m}^2 s}{\bar{m}^2 s - \bar{m}}$ فيؤلفان الى
 $\bar{m} = \frac{\bar{m}^2 s}{\bar{m}^2 s - \bar{m}}$ و $s - \bar{m} = \frac{\bar{m}^2 s}{\bar{m}^2 s - \bar{m}}$ وهما مقداران
لانهايين

(انظر الماقشة الثالثة من بند ٤٥) وحينئذ تكون النقطة المستقيمة بنور
واحد من الصوتين على بعد لانهايين من القطين ١ و s اعني لا وجود لها
لان فرض $m = s$ لا يفتح نقطة اخرى مستقيمة بنور واحد على المستقيم

١- لاعلى بين نقطة - ولاعلى شمال نقطة ١
الرابعة اذا فرض ان $m = 2$ و $s = 0$ في آن واحد المقدارا

$$m = \frac{2s}{2\gamma + 2\gamma} \text{ و } s = \frac{2\gamma}{2\gamma + 2\gamma} \text{ الى}$$

$$0 = \frac{2\gamma}{2\gamma + 2\gamma}$$

فالحل الاول للمسئلة هو النقطة التي وضع فيها الضوآن واما المقداران
الآخران اللذان هما

$$m = \frac{2s}{2\gamma - 2\gamma} \text{ و } s = \frac{2\gamma}{2\gamma - 2\gamma}$$

فيؤلان الى ٠ اعني انه ماغير معينين وحينئذ تكون جميع نقط المستقيم
١- البار بالنقطة الموضوع فيها الصوآن مستتيرة شررواخذ من الضوئين
وهذا الناتج موافق لما فرضناه من ان الضوئين في نقطة واحدة وان
شدتهما واحدة

(في المعادلات التي يمكن حلها بواسطة المعادلات ذات الدرجة الثانية)
(٨٥) تحل المعادلات ذات الدرجة الثالثة الخالية عن الحد المعلوم
بواسطة المعادلات ذات الدرجة الثانية فلحل المعادلة العمومية

$$m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = 0$$

يوضع $m = x$ مضروباً مشتركاً فيها فتؤول الى المعادلة

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$$

وحيث أن طرفها الاول المحتوى على حاصل ضرب مضروبين مساو للطرف
الثاني اي الصفر فيمكن تحقيقها فرض احدا المضروبين مساوياً لصفر وحينئذ
تكون المعادلة متحققة بفرض $m = 0$ أو

$$m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = 0 \text{ الذي يحدث منه}$$

$$m = -1 \text{ و } m = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

وبالحل

وبالجملة فيصكون للسهول سه ثلاثة مقادير هي

$$\text{سه} = -\frac{ع}{ف} + \sqrt{\frac{ع}{ف} - \frac{ك}{و}} \quad \text{سه} = -\frac{ع}{ف} - \sqrt{\frac{ع}{ف} - \frac{ك}{و}} \quad \text{سه} = \frac{ع}{ف}$$

ويمكن حل المعادلة $\text{سه} + ع + \text{سه}^2 + \text{ك} = \text{سه}^3$ ذات الدرجة الرابعة غير المحتوية على الحد المعلوم والحد المجهول بدرجة أولى بجل نظير المتقدم

(٨٦) المعادلة المضاعفة التربع معادلة لا تحتوي الاعلى الجاهيل بدرجات مزدوجة وتحل المعادلة المضاعفة التربع ذات الدرجة الرابعة بواسطة حل المعادلة ذات الدرجة الثانية فحل المعادلة العمومية

$$\text{سه}^2 + ع + \text{ك} = \text{سه}^3$$

يجعل $\text{سه} = ص$ ومنه يستخرج $\text{سه} = \pm \sqrt{\frac{ص}{ع}}$ ثم يوضع في المعادلة المفروضة بدل سه مقداره فتؤول الى

$$\text{ص}^2 + ع + \frac{ص}{ع} = ٠$$

ومنها يحدث

$$\text{ص}^2 = -\frac{ع}{ف} \pm \sqrt{\frac{ع}{ف} - \frac{ك}{و}}$$

واذا وضع على التعاقب بدل ص مقداره في $\text{ص}^2 = \pm \sqrt{\frac{ص}{ع}}$

$$\text{حدث سه} = \pm \sqrt{\frac{ع}{ف} + \sqrt{\frac{ع}{ف} - \frac{ك}{و}}} \quad \text{سه} = \pm \sqrt{\frac{ع}{ف} - \sqrt{\frac{ع}{ف} - \frac{ك}{و}}}$$

فاذن يكون لمجهول سه أربعة مقادير هي

$$\text{سه} = \sqrt{\frac{ع}{ف} + \sqrt{\frac{ع}{ف} - \frac{ك}{و}}} \quad \text{سه} = -\sqrt{\frac{ع}{ف} + \sqrt{\frac{ع}{ف} - \frac{ك}{و}}} \quad \text{سه} = \sqrt{\frac{ع}{ف} - \sqrt{\frac{ع}{ف} - \frac{ك}{و}}} \quad \text{سه} = -\sqrt{\frac{ع}{ف} - \sqrt{\frac{ع}{ف} - \frac{ك}{و}}}$$

$$\text{سه} = \sqrt{\frac{ع}{ف} + \sqrt{\frac{ع}{ف} - \frac{ك}{و}}} \quad \text{سه} = -\sqrt{\frac{ع}{ف} + \sqrt{\frac{ع}{ف} - \frac{ك}{و}}} \quad \text{سه} = \sqrt{\frac{ع}{ف} - \sqrt{\frac{ع}{ف} - \frac{ك}{و}}} \quad \text{سه} = -\sqrt{\frac{ع}{ف} - \sqrt{\frac{ع}{ف} - \frac{ك}{و}}}$$

•(مناقشات)•

(٨٧) قد حولت المعادلة المفروضة الى معادلة بهذه الصورة

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 0$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{y} + \sqrt{z} \quad \text{أو} \quad \sqrt{y} = \sqrt{x} + \sqrt{z} \quad \text{أو} \quad \sqrt{z} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

وينتج من الارتباط الأخير أن كل مقدار فرض لمجهول \sqrt{x} يحدد مقدارين متساويين ومتخالفين العلامة للمجهول \sqrt{y} ومن المعلوم أن مجهول \sqrt{z} من كل معادلة كمعادلة

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 0 \quad \text{له مقداران}$$

فادن يكون لمجهول \sqrt{x} أربعة مقادير متساوية عتني ومتخالفة العلامة فيستد يقال

كل معادلة مصاعفة التربع ذات درحة رابعة لها أربعة جذور متساوية عتني ومتخالفة في العلامة

ولتختبر الاحوال التي فيها هذه الجذور حقيقية أو تخيلية فنقول حيث أن $\sqrt{x} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$ ينتج بالداهة انه اذا كان جذرا \sqrt{x} موجبين تكون جذور مجهول \sqrt{y} الاربعة حقيقية واذا كان احد جذري \sqrt{x} موجبا والاخر سالبا يكون جذران من الاربعة حقيقيين والاخران تخيليين

واذا كان جذرا \sqrt{x} سالبين تكون جذور \sqrt{y} الاربعة تخيلية واذا كان جذرا \sqrt{x} تخيليين تكون جذور مجهول \sqrt{y} الاربعة كذلك وحيث علم مما تقدم كيفية استنتاج مقادير \sqrt{y} و \sqrt{z} وعلامتهما وفي اي الاحوال يكون مقدارا \sqrt{y} حقيقيين او تخيليين موجبين أو سالبين يسهل حينئذ معرفة جذور \sqrt{x} هل هي حقيقية او تخيلية في جميع العروصات الممكنة

ن ساقية الاحوال انطهوصية التي يكون فيها كل من ع و ك مساويا لغرفي آن واحد وعلى التعاقب والحالة التي يكون فيها ك = ع في فعال

اكان { ك = ٠ : يكون ص = ٠ و ص = ع ويكون ع ويكون ع حقيقيين اذا كان ع < ع

اكان { ك = ٠ : يكون ص = ٠ و ص = ع ويكون ع ويكون ع حقيقيين اذا كان ك > ع

اذا كان { ك = ٠ : يكون ص = ٠ و ص = ع ويكون ع ويكون ع حقيقيين اذا كان ك < ع

واذا كان { ك = ٠ : يكون ص = ٠ و ص = ع ويكون ع ويكون ع حقيقيين اذا كان ك > ع

و اذا كان { ك = ٠ : يكون ص = ٠ و ص = ع ويكون ع ويكون ع حقيقيين اذا كان ك < ع

• (١٢١) •

(٨٨) ولنطبق هذه المباحث العمومية على بعض مسائل خصوصية
تقول

• (المثال الاول) •

اذا فرضت المعادلة $x^2 - 13x + 36 = 0$ وجعل فيها
 $x = ص$ تؤل الى

$$ص^2 - 13ص + 36 = 0$$

نحذرا $ص$ يكونان حقيقيين غير متساويين ومتحدى العلامة وموجعين
اما الاول فلان الحد المعلوم موجب واقل من مربع نصف مكرر الحد الثاني
وأما الثاني فلان الحد المعلوم موجب وأما الثالث فلان مكرر الحد الثاني
مقابل فاذن تكون جذورا مجهول $ص$ الاربعة حقيقية ويتحقق هذا باجراء
الحساب وذلك بان يستخرج من المعادلة ذات الدرجة الثانية المتقدمة

$$ص = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4 \cdot 36}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}$$

ويخرج من ذلك

$$ص = \frac{13 + 5}{2} = 9 \quad و \quad ص = \frac{13 - 5}{2} = 4 \quad \text{فاذن يكون}$$

$$ص = 9 \quad و \quad ص = 4$$

• (المثال الثاني) •

اذا فرضت المعادلة $x^2 + 3x + 2 = 0$ وجعل فيها
 $x = ص$ آلت الى

$$ص^2 + 3ص + 2 = 0$$

نحذرا هذه المعادلة يكونان حقيقيين غير متساويين ومتحدى العلامة ومساويين
أما الاول والثاني فيبرهن عليهما مثل ما تقدم في المعادلة السابقة وأما الثالث

• (٣١) •

فلان ~~مكرر~~ الحد الثاني موجب فأذن تكون الحدود الأربعة للمعادلة
المصاعفة التربيع تحليلة لأن مقدارى \bar{v} يكونان

$$\bar{v} = 1 \text{ و } \bar{v} = -2$$

$$\bar{v} = 1 \pm \sqrt{1-4} \text{ و } \bar{v} = -2 \pm \sqrt{4-1}$$

(المثال الثالث)

إذا فرضت المعادلة $\bar{v}^2 - \bar{v} - 6 = 0$ ثم جعل فيها

$$\bar{v} = v$$

$$v^2 - v - 6 = 0$$

وحيث أن الحد المعلوم لهذه المعادلة سالب يكون جذرا \bar{v} حقيقيين
ومتخالفين في العلامة ويكونان من الحدود الأربعة للمعادلة المصاعفة
التربيع حقيقيين واثنان تخيليين ويتحقق ذلك من البحث عن مقدارى
 \bar{v} ومقادير v فيجد

$$\bar{v} = 3 \text{ و } \bar{v} = -2$$

ونشاء عليه بجدث

$$\bar{v} = 3 \pm \sqrt{9+4} \text{ و } \bar{v} = -2 \pm \sqrt{4-9}$$

(المثال الرابع)

إذا فرضت المعادلة $\bar{v}^2 - 7\bar{v} + 12 = 0$ وجعل فيها

$$\bar{v} = v$$

$$v^2 - 7v + 12 = 0$$

وحيث أن الحد المعلوم لهذه المعادلة موجب وأكبر من مربع نصف مكرره
الحد الثاني يكرر جذرا \bar{v} تخيليين فأذن تكون حدود \bar{v} كذلك

لأنه يحصل

$$\text{م} = \frac{11 - \sqrt{+7}}{1} \text{ و } \text{م} = \frac{11 - \sqrt{-7}}{1} \text{ ونا عليه يحدث}$$

$$\left(\frac{11 - \sqrt{+7}}{1} \right) \pm = \text{م} \text{ و } \left(\frac{11 - \sqrt{-7}}{1} \right) \pm = \text{م}$$

(٨٩) على معادلتين ذاتي مجهولين ودرجة ثانية يحذف اولا احدا المجهولين
 باحدى الطرق المعلومة المقررة في حل المعادلات ذات الدرجة الاولى كافي
 (٣٦ د)

فاذا كان المطلوب حل المعادلتين

$$\text{م} = \text{م} + \text{م}$$

$$\text{م} = \text{م} + \text{م}$$

يستخرج من المعادلة الثانية مقدار المجهول م ويوضع في الاولى يحدث
 على التواني

$$\text{م} + (\text{م} - \text{م}) = \text{م} \text{ أو}$$

$$\text{م} + \text{م} - \text{م} = \text{م} \text{ أو}$$

$$\text{م} - \text{م} = \text{م} + \text{م} - \text{م} \text{ أو}$$

$$\text{م} - \text{م} = \text{م} + \frac{\text{م} - \text{م}}{1} \text{ ومها يحدث}$$

$$\text{م} = \frac{\text{م} - \text{م}}{1}$$

و اذا وضع بدل م مقداره في معادلة م = م - م نزل الى

$$\text{م} = \frac{\text{م} - \text{م}}{1}$$

حينئذ المعادلتان المعروستان تكونان متحققتين بكل من مقداري م
 ومقداري م غير انه يلزم احدا علامتي الاولي أو الثانية لكل
 من المقدارين المتأخذين من مقداري م ومقداري م

ولننبه ايضا على ان مقداري صه هه يكونان عين مقداري سه لان
المعادلتين المقروضتين لا يتغيران متى غير فيهما المجهول سه بالمجهول صه
والمجهول صه بالمجهول سه فاذا سب مقدار سه قبل التعبير كما
عين مقداري صه المستخرجين بعد التغيير

(٩٠) اذا كان المطلوب حل المعادلتين $\text{سه} + \text{صه} = \text{ز}$

و $\text{سه} = \text{د}$ فلذلك حلان

الحل الاول ان يستخرج من المعادلة الثانية مقدار صه فيكون
 $\text{صه} = \frac{\text{د}}{\text{سه}}$ ثم يوضع هذا المقدار في المعادلة الاولى فيحدث على التوالي

$$\text{سه} + \frac{\text{د}}{\text{سه}} = \text{ز} \text{ أو } \text{سه}^2 + \text{د} = \text{ز} \text{ سه}$$

$$\text{سه}^2 + \text{د} = \text{ز} \text{ سه} \text{ أو } \text{سه}^2 - \text{ز} \text{ سه} + \text{د} = 0$$

$$\text{سه}^2 - \text{ز} \text{ سه} + \text{د} = 0 \text{ ومنها يحدث}$$

$$\text{سه} = \frac{\text{ز} \pm \sqrt{\text{ز}^2 - 4\text{د}}}{2} \text{ و } \text{صه} = \frac{\text{د}}{\text{سه}}$$

ولاستخراج مقداري صه يوضع في المعادلة $\text{سه} = \frac{\text{د}}{\text{سه}}$ بدل سه

المقدار المصاعف $\left(\frac{\text{ز} \pm \sqrt{\text{ز}^2 - 4\text{د}}}{2} \right)$ ثم يوضع أيضا المقدار المضاعف

$\left(\frac{\text{ز} \pm \sqrt{\text{ز}^2 - 4\text{د}}}{2} \right)$ بدل سه ويختصر فيحدث لمجهول صه مقدار

$$\text{صه} = \frac{\text{د}}{\frac{\text{ز} \pm \sqrt{\text{ز}^2 - 4\text{د}}}{2}} = \frac{2\text{د}}{\text{ز} \pm \sqrt{\text{ز}^2 - 4\text{د}}}$$

وتتحقق المعادلتان المقروضتان بجملة مقادير سه الاربعة وبجدة مقادير
 صه الاربعة وتستنتج ههنا ان الجملتين يتعشيق علامات مقدار سه باربعة

طرق مختلفة ثم تؤخذ العلامات المطابقة لها من مقادير \sqrt{z} فيثبت \sqrt{z} تكون مقادير \sqrt{z} عين مقادير \sqrt{z} وهذا ناشئ من كون المجهولين داخلين بكيفية واحدة في المعادلتين المقروضتين

(تنبية)

لا يمكن تحويل مقدار $\sqrt{z} = \sqrt{\frac{z - \frac{z}{2}}{2}}$ الى هذه الصورة $\sqrt{z} = \sqrt{\frac{z}{2} + \frac{z}{2}}$ يجب أن يكون $\frac{z}{2} - \frac{z}{2}$ مربعاً كاملاً كما في (٦٦) ومن المثال المقروض ينتج $\frac{z}{2} = \frac{z}{2}$ أو

$$\frac{z}{2} = \frac{z}{2} \text{ و } \frac{z}{2} = \frac{z}{2} \text{ فاذن يكون}$$

$$\frac{z}{2} = \frac{z}{2} \text{ أي أن } \frac{z}{2} - \frac{z}{2} = \frac{z}{2} - \frac{z}{2} \text{ مربع كامل فاذن}$$

يمكن تحويل المقدار المقروض الى مقدار آخر بهذه الصورة $\sqrt{z} = \sqrt{\frac{z}{2} + \frac{z}{2}}$ ويجب علم من (٦٦) بعد الرمز الى $\frac{z}{2} - \frac{z}{2}$ بالحرف \sqrt{z} أن

$$\frac{z}{2} = \frac{z}{2} \text{ و } \frac{z}{2} = \frac{z}{2} \text{ وتقدم أن } \frac{z}{2} = \frac{z}{2} \text{ و } \frac{z}{2} = \frac{z}{2}$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{\frac{z}{2} + \frac{z}{2}} \text{ يكون } \frac{z}{2} = \frac{z}{2} \text{ و } \frac{z}{2} = \frac{z}{2} \text{ وبالجملة فيكون}$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{\frac{z}{2} + \frac{z}{2}} \text{ أو } \sqrt{z} = \sqrt{\frac{z}{2} + \frac{z}{2}} \text{ و } \sqrt{z} = \sqrt{\frac{z}{2} + \frac{z}{2}}$$

(١٢٦)

وبإجراء عمل مشابه لذلك يحدث

$$\sqrt{\frac{1}{r} \pm \frac{1}{r}} \pm \sqrt{\frac{1}{r} \pm \frac{1}{r}} = \frac{1}{r} \pm \frac{1}{r}$$

منه =

• (الحل الثاني) •

ان يستنتج المقداران الاخيران من اول وهلة بطريقة أخصر من الطريقة

المستعملة في حل المعادلتين المعروضتين اللتين هما $r^2 + s^2 = k^2$

و $r^2 - s^2 = k^2$ وذلك بان يجمع طرفا الى طرف مع ملاحظة
أن الطرف الاول الناتج يكون مربعاً كاملاً للكمية ذات الحدين $r + s$

فيحدث $(r + s)^2 = k^2 + s^2$ ومنها يستخرج

$$\sqrt{k^2 + s^2} = r + s$$

ثم تطرح المعادلة الثانية من الاولى فيحدث

$$(r - s)^2 = k^2 - s^2$$

ومنها ينتج

$$\sqrt{k^2 - s^2} = r - s$$

وحيث علم مجموع المجهولين r و s وفاضلهما يستخرج كل منهما

بواسطة القاعدة المقررة في (بند ٣) فيكونان

$$r = \frac{1}{2} \left(\sqrt{k^2 + s^2} + \sqrt{k^2 - s^2} \right)$$

$$s = \frac{1}{2} \left(\sqrt{k^2 + s^2} - \sqrt{k^2 - s^2} \right)$$

(٩١) متى احتوت معادلة ذات مجهول واحد على علامة جذر تربيعي

مشتقل على المجهول المدكوراً وعلى علامات جذور كذلك فلها يلزم أولاً

حذف العلامة او العلامات كما في الامثلة الآتية

• (النال الاول) •

اذا كان المطلوب حل هذه المعادلة

(١٢٧)

$$٢ + ٧٥ = ٣$$

يحول ٢ الى الطرف الاول بحيث يكون الطرف الثاني محتويا على علامة الجذر فقط ثم يرفع كل من الطرفين الى الدرجة الثانية ويختصر الناتج فيحدث

$$٢ = (٣ - ٧٥) \quad \text{أو}$$

$$٩ = ٣ - ١٢ = ٤ + ٢٥ \quad \text{أو}$$

$$٩ = ٣ - ٣٧ = ٤ + ٦ \quad \text{أو}$$

$$٣ = \frac{٣٧}{٩} + \frac{٤}{٩} \quad \text{ومنها يحدث}$$

$$\frac{١٢٢٥ \sqrt{٢+٣٧}}{١٨} = \frac{٣٦ \times ٤ - ٣٧}{١٨} \sqrt{٢+٣٧} = \frac{٤}{٩} - \left(\frac{٣٧}{١٨} \right) \left(\frac{٣٧}{١٨} \right) = \frac{٣٥+٣٧}{١٨}$$

فاذن يكون

$$\frac{١}{٩} = \frac{٢}{١٨} = \frac{٣٥-٣٧}{١٨} = ٣ \quad \text{و} \quad \frac{٧٢}{١٨} = \frac{٣٥+٣٧}{١٨} = ٣$$

ولتحقيق هذين المقدارين يوضع في المعادلة ٣ = ٢ - ٧٥ بدل ٣ مقداره وهو ٤ فيحدث

$$٢ = ٢ \quad \text{أو} \quad ٢ = ١٠$$

نبحث ان المقدار الاول يكون محققا للمعادلة

واذا وضع في المعادلة بعينها بدل ٣ مقداره وهو $\frac{١}{٩}$ نؤول الى $\frac{١}{٩} = ٢$ أو $\frac{٥}{٩} = \frac{٥}{٩}$ وهذا ناسا وقاسد به يثبت ان مقدار

$\frac{١}{٩} = ٣$ لا يكون محققا للمعادلة ٣ = ٢ - ٧٥

ولو كان محققا للمعادلة ٩ = ٣ - ١٢ = ٤ + ٢٥ = ٢٥

لان بعض مقادير المجهول ٣ اذا صير طرفي المعادلة ٣ = ٢

$$= ٧٥ \quad \text{متساويين ومتخالفين في العلامة فيصير طرفي المعادلة}$$

(١٢٨)

٩ سـ - ١٢ سـ + ٤ = ٢٥ سـ متساويين لان هذين الطرفين
حادثان من تربيع طرفي المعادلة الاولى

فلايجاد المعادلة التي تحقق بمقدار سـ = $\frac{1}{9}$ تغير العلامة المتلوثة بعلامة
الجزر في المعادلة ٣ سـ - ٢ = ٥ سـ وبه نؤل الى

$$٣ سـ - ٢ = ٥ سـ$$

(المثال الثاني)

اذا كان المطلوب حل المعادلة $٣ سـ + ١ = ٢ + ٥ سـ$
يرفع طرفهاا للدرجة الثانية فتصير

$$٣ سـ + ١ = ٤ + ٥ سـ + ١$$

وبترك علامة الجذر في الطرف الثاني واختصار الناتج يحدث

$$٢ سـ - ٢ = ٤ + ٥ سـ \text{ او } ٢ سـ - ١ = ٥ سـ + ٢$$

ثم يربع الطرفان ثانيا فيحدث

$$٢ سـ - ٢ = ١ + ٥ سـ$$

$$٢ سـ - ٦ = ٥ + ٥ سـ \text{ ومنها يحدث } ٠ = ٥ + ٥ سـ$$

$$٢ سـ - ٦ = ٥ + ٥ سـ \text{ فاذن يكون } ٢ سـ - ٦ = ٥ + ٥ سـ$$

$$٢ سـ - ٦ = ٥ + ٥ سـ \text{ و } ٠ = ٥ + ٥ سـ$$

ومقدارا سـ و سـ يحققان المعادلة المعروضة

(المثال الثالث)

اذا كان المطلوب حل المعادلة $٢ سـ - (١ - سـ) = ١ + ٥ سـ$
تحويل علامة الجذر الثالثة الى الطرف
الثاني ثم يربع كل من الطرفين فيحدث

$$٢ سـ - ٢ - ٢ = ١ + ٥ سـ + (١ - سـ)(١ - سـ)$$

$$\sqrt{2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)$$

ثم يربع أيضا طرفا هذه المعادلة الأخيرة فيجد

$$2 - 2\sqrt{2} + 1 = 1 - 8\sqrt{2} + 8 \text{ أو } 10\sqrt{2} + 9 = 0 \text{ ومنها يحدث}$$

$$2\sqrt{2} + 5 = \sqrt{17} \text{ أو } 2\sqrt{2} - 5 = \sqrt{17} \text{ أو } 2\sqrt{2} + 5 = \sqrt{17} \text{ أو } 2\sqrt{2} - 5 = \sqrt{17}$$

فاذن يكون لمجهول ٢ أربعة مقادير متعارضة هي

$$2\sqrt{2} + 5 = \sqrt{17} \text{ و } 2\sqrt{2} - 5 = \sqrt{17} \text{ و } 2\sqrt{2} + 5 = -\sqrt{17} \text{ و } 2\sqrt{2} - 5 = -\sqrt{17}$$

$$2\sqrt{2} + 5 = \sqrt{17} \text{ و } 2\sqrt{2} - 5 = \sqrt{17} \text{ و } 2\sqrt{2} + 5 = -\sqrt{17} \text{ و } 2\sqrt{2} - 5 = -\sqrt{17}$$

ولا تتحقق المعادلة المفروضة بتقديرى ٢ و ٣ و ٤ و ٥

(الباب الرابع)

(في المتناسقات والمتواليات العددية والهندسية واللوغاريتم)

(في المتناسقة العددية أى التعاضلية)

(٩٢) براهين خواص المتناسقة المقررة في كتب علم الحساب تسهل

جواب أسئلة القواعد الجبرية وبيان ذلك أن يقال

كل متناسقة عددية كالمتناسقة

و . ه . د . ج . ب . ا

نوضح هكذا

و . ه . د . ج . ب . ا ومنها يستخرج

$$ج + د = ه + ب \text{ و } د + ه = ج + ب \text{ و } ه + ب = ج + د \text{ و } ج + د = ه + ب$$

أعني أن كل متناسقة عددية حاصل جمع طرفيها يساوى حاصل جمع وسطها

وأن أحد طرفيها يساوى حاصل جمع وسطها منقوصا منه الطرف الآخر

وأن أحد وسطها يساوى حاصل جمع طرفيها منقوصا منه الوسط الآخر

ويستخرج من المتساوية ج + د = ه + ب أن ج - ه = د - ب و أعي

اذا ساوى حاصل جمع عددين حاصل بضع آخرين تركيب من هذه الاعداد
الاربعة متناسبة عددية جزءاً أحداً الحاصلين طرفاها وجزءاً الآخر وسطاها
والوسط التفاضلى لعددين يساوى نصف حاصل جمعها لانه من المناسبة

$$٢ : ٣ :: ٤ : ٦ \text{ يحدث}$$

$$٢ : ٣ :: ٤ : ٦ \text{ ومن هذه المساوية ينتج}$$

$$\frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٦}$$

(فرا المناسبة الهندسية)*

(٩٣) كل متناسبة هندسية كالمساوية ٢ : ٣ :: ٤ : ٦ و

نضع هكذا $\frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٦}$ ومن هذه المساوية يستنتج

$$٢ = ٤ \text{ و } ٣ = ٦ \text{ و } \frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٦}$$

أعني أن كل مناسبة هندسية حاصل ضرب طرفيها يساوى حاصل ضرب
وسطيها وأن أحد طرفيها يساوى خارج قسمة حاصل ضرب وسطيها على طرفيها
الآخر وأن أحد وسطيها يساوى خارج قسمة حاصل ضرب طرفيها على الوسط
الآخر ويستنتج من كل مساوية كالمساوية ٢ : ٣ :: ٤ : ٦ أن $\frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٦}$
أعني اذا ساوى حاصل ضرب عددين حاصل ضرب عددين آخرين تركيب
من هذه الاعداد الاربعة متناسبة هندسية اصلاً أحداً الحاصلين طرفان لها
واصلاً الحاصل الآخر وسطان لها

ويستنتج من المساوية ٢ : ٣ :: ٤ : ٦ بناء على ما تقدم ثمان متناسلات

$$٢ : ٣ :: ٤ : ٦ \text{ و } ٢ : ٤ :: ٣ : ٦ \text{ و } ٣ : ٦ :: ٢ : ٤ \text{ و } ٤ : ٦ :: ٢ : ٣$$

$$\text{و } ٢ : ٦ :: ٣ : ٤ \text{ و } ٣ : ٢ :: ٤ : ٦ \text{ و } ٤ : ٢ :: ٦ : ٣ \text{ و } ٦ : ٣ :: ٤ : ٢$$

فيشاهد من متناسلات الصف الاول الاربعة أن الاعداد الاربعة المناسبة
مع بعضها يتكون منها متناسلة ايضاً بتغيير موضع الوسطين أو الطرفين
ويشاهد ايضاً من متناسلات الصف الثاني الاربعة ان التاسب لا يتغير بتغيير
الطرفين بالوسطين ولا الوسطين بالطرفين

والوسط الهندسي بين عددين او كيتين يساوى جذر حاصل ضربهما لانه من

* (١٣١) *

المتناسبة $\frac{4}{3} : ٥ : ٦ : ٧$: : $٨ : ٩ : ١٠ : ١١$ يحدث ،

$$\frac{٨}{٤} = \frac{٩}{٥} = \frac{١٠}{٦} = \frac{١١}{٧}$$

وإذا ضرب طرف ووسط متناسبة في عدد واحد أو قسم عليه بقيت التناسبة

على حالها لأنه يستنتج من المتساوية $\frac{٨}{٤} = \frac{٩}{٥}$ أن

$$\frac{٨}{٤} = \frac{٩}{٥} \text{ أو } ٨ : ٤ :: ٩ : ٥$$

ويستنتج أيضاً من المتساوية المذكورة $\frac{٨}{٤} = \frac{٩}{٥}$ ومن هذه يحدث

$$\frac{٨}{٤} = \frac{٩}{٥} \text{ أي } ٨ : ٤ :: ٩ : ٥$$

وبمثل هذا يبرهن على حالة القسمة

وإذا كان لتناسبتين نسبة مشتركة تركب من النسبتين الآخرين منهما متناسبة

فالتناسبتان

$$٨ : ٤ :: ٩ : ٥ \text{ و } ١٠ : ٦ :: ١١ : ٧$$

$$\frac{٨}{٤} = \frac{٩}{٥} \text{ و } \frac{١٠}{٦} = \frac{١١}{٧}$$

$$\frac{٨}{٤} = \frac{٩}{٥} \text{ أي } ٨ : ٤ :: ٩ : ٥$$

ومتى اتحد المقدمان أو التاليان في متناسبتين تركب من غير المتحد منهما

متناسبة فالتناسبتان

$$٨ : ٤ :: ٩ : ٥ \text{ و } ١٠ : ٦ :: ١١ : ٧$$

$$٨ : ٤ :: ٩ : ٥ \text{ و } ١٠ : ٦ :: ١١ : ٧$$

يستنتج منهما بمقتضى ما تقدم

$$٨ : ٤ :: ٩ : ٥ \text{ و } ١٠ : ٦ :: ١١ : ٧$$

$$٨ : ٤ :: ٩ : ٥ \text{ أي } ٨ : ٤ :: ٩ : ٥$$

وكل متناسبة هندسية كالتناسبة $٨ : ٤ :: ٩ : ٥$ ويمكن وضعها

هكذا $\frac{٨}{٤} = \frac{٩}{٥}$ وبإضافة واحد لكل من طرفي هذه المتساوية أو طرحه

مها نؤول إلى

* (١٢٢) *

$$أى \quad ١ \pm \frac{٢}{٥} = ١ \pm \frac{٢}{٥}$$

$$\frac{١ \pm \frac{٢}{٥}}{٥} = \frac{٥ \pm ٢}{٥} \text{ ومنها يحدث } ٥$$

٥ : ٥ :: ٥ : ٥ + ٢ و ٥ : ٥ - ٢ :: ٥ : ٥ - ٢
ويحدث أيضا من مقارنة المناسبة ٥ : ٥ :: ٥ : ٥ + ٢ وبكل من
المتناسبتين المتقدمتين أن

$$٥ : ٥ :: ٥ : ٥ + ٢ و ٥ : ٥ - ٢ :: ٥ : ٥ - ٢$$

ومنها يحدث

$$٥ : ٥ :: ٥ : ٥ + ٢ و ٥ : ٥ - ٢ :: ٥ : ٥ - ٢$$

ويخرج من ذلك أن نسبة المقدم الاول رائدا أو ناقصا التالى الاول الى هذا
التالى كنسبة المقدم الثانى رائدا أو ناقصا التالى الثانى الى هذا التالى
وأن نسبة المقدم الاول رائدا أو ناقصا التالى الاول الى هذا المقدم كنسبة
المقدم الثانى رائدا أو ناقصا التالى الثانى الى هذا المقدم وأن نسبة المقدم
الاول رائدا تاليه الى هذا المقدم ناقصا تاليه كنسبة المقدم الثانى رائدا تاليه
الى هذا المقدم ناقصا تاليه

واذا غير وسط المناسبة ٥ : ٥ :: ٥ : ٥ و آلت الى

$$٥ : ٥ :: ٥ : ٥ و منها يحدث بناء على ما تقدم$$

$$٥ : ٥ :: ٥ : ٥ + ٢ و ٥ : ٥ - ٢ :: ٥ : ٥ - ٢$$

$$٥ : ٥ :: ٥ : ٥ + ٢ و ٥ : ٥ - ٢ :: ٥ : ٥ - ٢$$

اعنى ان نسبة حاصل جمع اوقاضل مقدمى متناسبة الى حاصل جمع اوقاضل
تاليها كنسبة اى مقدم الى تاليه وان نسبة حاصل جمع المقدمين وحاصل جمع
التاليين تعادل النسبة بين فاضل المقدمين وفاضل التاليين والمتناسبة التى
بهذه الصورة ٥ : ٥ :: ٥ : ٥ + ٢ و ٥ : ٥ - ٢ :: ٥ : ٥ - ٢ الخ تسمى
متناسبة متوالية

وكل متناسبة متوالية حاصل جمع مقدماتها الى حاصل جمع تواليها كنسبة

في تركيبها الاتعيين اساسها المجهول ولذا يستخرج من القاعد ١١٠

$$\frac{2-l}{1-2} = س$$

وحيث ان $2 = م + ٢$ يكون

$$\frac{2-l}{1+م} = س$$

اعني ان اساس المتوالية المطلوبة يساوي خارج قسمة فاضل الحدين المعالومين على عدد الحدود المدخلة رائدا واحدا

فاذا اريد ادخال ثمانية حدود بين العددين ٤ و ٤٩ بحيث يتركب من

الجميع متوالية عددية وضع في المعادلة $\frac{2-l}{1+م} = س$ بدل ل و م و

مقاديرها وهي ٤٩ و ٤ و ٨ فيحصل $س = \frac{2-49}{1+8} = ٥$

اعني ان الاساس المطلوب يساوي ٥ وحيث ذتركب المتوالية هكذا

٤ . ٩ . ١٤ . ١٩ . ٢٤ . ٢٩ . ٣٤ . ٣٩ . ٤٤ . ٤٩

وحاصل جمع كل حدين كائين على ابعاد متساوية من طرفي متوالية يساوي

حاصل جمع هذين الطرفين في المتوالية العددية

$$٤ + ٤٩ = ٥٣ \quad ٩ + ٤٤ = ٥٣ \quad ١٤ + ٣٩ = ٥٣ \quad ١٩ + ٣٤ = ٥٣ \quad ٢٤ + ٢٩ = ٥٣$$

$$٤ + ٤٩ = ٥٣ \quad ٩ + ٤٤ = ٥٣ \quad ١٤ + ٣٩ = ٥٣ \quad ١٩ + ٣٤ = ٥٣ \quad ٢٤ + ٢٩ = ٥٣$$

$$٤ + ٤٩ = ٥٣ \quad ٩ + ٤٤ = ٥٣ \quad ١٤ + ٣٩ = ٥٣ \quad ١٩ + ٣٤ = ٥٣ \quad ٢٤ + ٢٩ = ٥٣$$

وقس على هذا

(٩٥) واذا اريد تحصيل مقدار حاصل جمع حدود متوالية عددية

كالتوالي

$$٤ . ٩ . ١٤ . ١٩ . ٢٤ . ٢٩ . ٣٤ . ٣٩ . ٤٤ . ٤٩$$

يتحصل بالساء على ما تقدم

$$ع = ٤ + (٤ + س) + (٤ + ٢س) + \dots + (٤ + (٢-١)س)$$

بالرمز بالحرف ع لمقدار حاصل جمع حدود المتوالية المطلوب ولايجاد

قانون مختصر عن هذا الوضع المتساوية المتقدمة بهاتين الصورتين

$$ع = ٢ + (٢ + س) + (٢ + س) + ٠٠٠ + (ل - س٢) + (ل - س) + ل$$

$$ع = ل + (ل - س) + (ل - س) + ٠٠٠ + (٢ + س) + (٢ + س) + ٢$$
 وبجمع هاتين المتساويتين طرفا الى طرف وملاحظة ان حاصل جمع كل حدين متحدين في الرتبة يتول الى $٢ + ل$ فيحصل

$$ع٢ = ٢ + ل مكررا بقدر عدد الحدود اى$$

$$ع٢ = (٢ + ل) ٢ ومنها يحدث$$

$$ع = \frac{٢(٢+ل)}{٢} \dots \dots \dots (٢)$$

اعنى ان حاصل جمع حدود متوالية تفاضلية يساوى نصف حاصل جمع حديها المتطرفين مكررا بقدر عدد حدودها

واذا وضع في القانون (٢) بدل الحد الاخير ل مقداره المين بمعادلة (١) آل الى

$$ع = \frac{٢(٢ + (١ - س))}{٢}$$

(٩٦) تحل المسائل المتعلقة بالمتواليات العددية بواسطة القانونين (٥) و (٢) وذلك انه اذا علم ثلاث كميات من الخمس ٢ و $س$ و $ل$ و $ع$ الداخلة في القانونين (١) و (٢) امكن تعيين الاثنين الاخرين ومن تعشيق هذه الكميات الخمس مع بعضها يفرض ثلاث منها معلومة وباقيا مجهولا لا يحدث عشر مسائل سهلة الحل لانه يتحصل دائما معادلتان ذاتا مجهولين

وهما الجدول لا يستعمل على حل المسائل العشر المتقدمة ذكرناه هنا لمن يريد

(مسائل يطلب حلها من الطلبة)

(٩٧) الاولى ان يطلب تعيين الحد الاول وعدد الحدود من متوالية

عددية اساسها ٨ وحدها الاخير ١٨٥ وحاصل جمعها ٢٩٤٥.

الثانية ان يطلب ادخال تسعة اوساط عددية بين اى حدين من المتوالية

÷ ٢ . ٥ . ٨ . ١١ . ١٤ . ١٧

الثالثة ان يطلب معرفة عدد طاوور مثلثي صفه الاول نفر واحد والثاني

نفران والثالث ثلاثة وهكذا الى صف يكون عددا اقاربه مساويا

الرابعة ان يطلب ايجاد حاصل جمع حدود المتوالية العريضة

÷ ١ . ٣ . ٥ . ٧ . ٩ . ١٠٠٠ التى عدد حدودها

الخامسة ان يراد ترميل طريق بعيدة عن كل رمل بمقدار ٤٠ ميتر وقد

علمت بمقايضة ذلك فوجد انه يلزم لترميلها شخص مائة عربانه لكل منها بعيدة

عن مجاورتها بستة امتار بشرط ان يكون موضع العربانه الاولى على بعد من

التل يساوى ٤٠ مترا وان ترجع العربانه الاحيرة الى المحل الذى شئت

منه والمطلوب معرفة عدد الامتار التى يقطعها سواق العربانات فى ترميل

الطريق المذكورة

السادسة راحل يقطع عشرة فراسخ فى اليوم الواحد وفارس يقطع فى اول

يوم ثلاثة فراسخ ويزيد سيره فى كل يوم عن سابقه فرسخين سارا فى آن واحد

والمطلوب معرفة عدد الايام التى تمضى من اثناء سيرهما الى نقطة تلاقيهما

والمسافة التى يقطعها كل منهما

(فى المتواليات التقسيمية اى الهندسية)

(٩٨) كل متسلسلة مركبة من جملة حدود متتالية خارج قسمة احدها

على سابقه ثابت او كل حد منها مساو لسابقه مضروباً فى كمية ثابتة تسمى

متوالية والكمية الثابتة تسمى اساس المتوالية

ويعتضى هذا التعريف تكون المتوالية تصاعدية او تنازلية بحسب اساسها

اى بحسب كونه اكبر من الواحد او اصغر منه فحينئذ تكون المتوالية

ع (سـ ١) = سـ ١ - سـ ٢ = سـ ٣ (سـ ١ - سـ ٢) ومها يستخرج

$$ع = \frac{(سـ ١ - سـ ٢)}{سـ ١ - سـ ٢} \dots \dots \dots (٣)$$

واذا وضع ل بدل الحد الاخير الذى مقداره سـ ١ - سـ ٢ فى المعادلة (٣) تؤول الى

$$ع = \frac{سـ ١ - سـ ٢}{سـ ١ - سـ ٢}$$

اعنى ان مجموع حدود متوالية هندسية يساوى خارج قسمته باقى طرح الحد الاول من حاصل ضرب الحد الاخير فى الاساس على باقى طرح الواحد من الاساس

(١٠١) جميع المسائل المتعلقة بالمتواليات الهندسية تحل بواسطة المعادلتين (١) و (٣) المحتويتين على الكميات الخس و سـ و سـ و ل و ع اذا علم منها ثلاث لانه حينئذ يمكن تعيين الاثنتين الاخرين الا ان اغلب حل المسائل المذكورة يتوقف على قواعد تأتى كما لو كان احد المجهولين سـ الذى هو عدد حدود المتوالية فانه يؤل الامر الى حل معادلة مشتملة على اس مجهول وكما لو كان المجهولان سـ و سـ أو ل و سـ فانه يؤل الامر الى حل معادلة ذات درجة مساوية لعدد حدود المتوالية

واذا استعملت المعادلة (٢) الحادثة من المعادلة (٣) بواسطة القسمة آل الامر الى حل معادلة ذات درجة مساوية سـ ١ - سـ ٢

واذا كان الاساس سـ ١ = ١ استعملت المعادلة (٢) بدل المعادلة (٣) لانه يحدث من المعادلة (٣) المجموع ع مقدار غير معين اى ان ع = سـ ١ واما المعادلة (٢) فانها تحدث له مقدارا محدودا اى ان ع = سـ ٢ وقد تقدم ان المقدار غير المعين ينشأ عن وجود مضروب مشترك فالمضروب المشترك للمعادلة (٣) هاهو (سـ ١ - سـ ٢) انظر (بند ٥١)

(١٠٢) متى كان الاساس المرمورة بالحرف سـ اصغر من الواحد

حصة الواهب الاول $\frac{1}{81} + \frac{1}{27} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$
 وحصة الواهب الثاني $\frac{1}{81} - \frac{1}{27} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$
 وحيث زاد الواهب الاول $\frac{1}{81}$ من العبد يرجع للواهب الثاني منه ثلثه
 اى $\frac{1}{243}$ وبناء عليه تكون

حصة الواهب الاول $\frac{1}{243} - \frac{1}{81} + \frac{1}{27} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$
 وحصة الواهب الثاني $\frac{1}{243} + \frac{1}{81} - \frac{1}{27} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$ وهكذا
 فقد نشأ من هذه الهبة الدور والتسلسل فاذا ن تكون حصة كل منهما مساوية
 لفاضل حاصلى جمعى متواليتين تنازليتين غير نهائيتين فتواليتا الواهب الثانى
 $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32} : \dots$ الخ و $\frac{1}{81} : \frac{1}{27} : \frac{1}{9} : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27} : \frac{1}{81} : \dots$ الخ
 ومنها يتبع ان حصته الحقيقية مساوية $\frac{1}{8} - \frac{1}{81} = \frac{79}{729}$ فقد آل
 الثلث الذى هو حصة الواهب الثانى الى ربع وبناء عليه تكون حصة الواهب
 الاول ثلاثة ارباع

فتعيين حصة الواهب الاول يجرى العمل المذكور فى تعيين حصة
 الواهب الثانى

الثالثة احد المصورين عنده ٨ صوريدي بيعها فدفع له فى كل واحدة
 ١٥٠ غرشامرة واحدة ثم دفع له فى ادناها ثمن قدره خمسة غروش وفيما
 فوقه عشرة غروش وهكذا بتضعيف الثمن الى الثامنة والمراد معرفة اربح
 البيعين

(فالجواب ان البيع الثانى اربح)

الرابعة رميل من الخلل يحتوى على مائة اقه صار يؤخذ منه كل يوم اقة
 واحدة وبصاف اليه اقة باء بدلها والمطلوب معرفة عدد مرات تكرار هذا
 الفعل حتى لا يبقى من الخلل الا الربع

(فالجواب انه لا بد من تكرار الفعل ١٨٣ مرة)

(فى اللوغاريتم)

(١٠٦) قبل الشروع فى الخواص العنصرية للوغاريتم واستعماله

في العمليات الحسابية المذكورة هي أن جميع الأعداد تنبع من قوى عدد موجب أكبر من الواحد. وأصغر منه بيان ذلك أن يقال

أولاً إذا رمز بالرمز ω لعدد ثابت موجب أكبر من الواحد وكوت

القوى المتوالية $\omega^1, \omega^2, \omega^3, \dots$ الخ حدث من ذلك جملة أعداد لا تزال أخذة في الزيادة إلى غير نهاية ومتقاربة من بعضها كلما تقاربت أسس هذه القوى من بعضها ومن هنا يؤخذ أنه إذا رمز بالرمزين ω و ω'

لكميتين متغيرتين وفرضت المعادلة $\omega = \omega'$ وفرض للمتغير ω

جملة مقادير متقاربة من بعضها من ابتداء الصفر إلى ∞ كان

للمتغير ω' جملة مقادير متقاربة من بعضها بحيث إذا زاد ω بكيفية

متوالية من ابتداء الصفر إلى ∞ أخذ ω' جميع المقادير من الواحد

إلى ∞ وإذا فرض للمتغير ω' مقادير سالبة بأن كان

$\omega = -\omega'$ الت المعادلة المتقدمة إلى

$$\omega = \frac{\omega'}{\omega'}$$

وإذا فرض أن ω' يأخذ مقادير من ابتداء الصفر إلى ∞ فإن

ω يأخذ مقادير من ابتداء الواحد إلى ∞ وحينئذ يأخذ

$$\frac{1}{\omega'} \text{ مقادير من ابتداء الواحد إلى } \infty \text{ أي إلى الصفر}$$

وثانياً إذا فرض أن ω يدل على عدد دون الواحد معين بالكسر $\frac{1}{\omega}$ (فرض

ω عدداً أكبر من الواحد) نؤول المعادلة $\omega = \omega'$ إلى $\omega' = (\frac{1}{\omega}) = \frac{1}{\omega'}$

فاذا أخذ ω جميع المقادير من ابتداء الصفر إلى ∞ أخذ ω'

جميع الأعداد من الواحد إلى ∞ . فحينئذ تكون جميع مقادير ∞ محصورة بين الواحد والصفر وإذا أخذ المتغير ∞ مقادير من ابتداء الصفر إلى ∞ أخذ ∞ جميع الأعداد المحصورة بين الواحد والصفر حينئذ يكون للمتغير ∞ جميع الأعداد من ابتداء الواحد إلى ∞ +

(١٠٧) حيث تقرر أنه يمكن تكوين جميع الأعداد من القوى المتنوعة لعدد ثابت يطلق اسم لوغاريتم هذه الأعداد على أسس القوى المتنوعة المذكورة المساوية لجميع الأعداد بالتناظر وحينئذ يكون كل مقدار للمتغير ∞ في المعادلة $\infty = \infty$ لوغاريتم المقدار المطابق له من مقادير ∞ (يفرض ∞ عددا موجبا ويسمى أساس الجمل اللوغاريتمية) ولذا يوضع $\infty = \log \infty$

(١٠٨) إذا فرض أن ∞ و ∞ و ∞ و ∞ الخ رموز لأعداد ∞ و ∞ و ∞ و ∞ الخ رموز للوغاريتمات بها بالنسبة للجمل أساسها ∞ حدث

$$\begin{aligned} \infty &= \infty, \quad \infty = \infty, \quad \infty = \infty \text{ ومنها يحدث} \\ \infty &= \infty, \quad \infty = \infty, \quad \infty = \infty \\ \infty &= \infty \end{aligned}$$

ومن هنا يؤخذ بمقتضى قاعدة الأسس

$$\begin{aligned} \infty \times \infty \times \infty \dots \infty &= \infty + \infty + \infty + \dots \infty \text{ ومنها يحدث} \\ \log \infty \log \infty \log \infty \dots \log \infty &= \infty + \infty + \infty + \dots \infty \text{ الخ و} \\ \log \infty = \infty - \infty \text{ و } \log \infty = \infty \text{ و } \log \infty = \infty \end{aligned}$$

فببند يكون لوغا صه صه صه . . . الخ = لوغا صه

+ لوغا صه + لوغا صه + لوغا صه . . . الخ .

و لوغا صه = لوغا صه - لوغا صه

و لوغا صه = م لوغا صه و لوغا صه = لوغا صه / لوغا صه

وهذه المتساويات الأربع تستنبط منها قواعد

الاولى ان لوغاريتم حاصل ضرب يكون مساويا لمجموع لوغاريتات مضاريه

الثانية ان لوغاريتم خارج قسمة عددان يكون مساويا لفرق لوغاريتهم المقسوم

مطروحاته لوغاريتهم المقسوم عليه

الثالثة ان لوغاريتهم اى قوة لاى عدد يكون مساويا للوغاريتهم هذا العدد

مضروباً فى درجة القوة المذكورة

الرابعة ان لوغاريتهم جذراى عدد يكون مساويا للوغاريتهم هذا العدد مقسوما

على درجة الجذر المذكور

ويؤخذ من القاعدة الثانية ان لوغاريتهم اى كسر يكون مساويا للوغاريتهم

بسطه مطروحاته لوغاريتهم مقامه وينبغى من القاعدتين الاولى ان لوغاريتهم

الحد الرابع من متناسبة يكون مساويا لمجموع لوغاريتى الوسطين مطروحاته

لوغاريتهم الحد الاول

(١٠٩) يؤخذ من تعريف اللوغاريتم ومما تقدم فى (بند ١٠٦)

اولا ان الاساس فى كل معادلة لوغاريتية يكون مساويا للواحد ويكون

لوغاريتهم الواحد مساويا للصفر

وثانيا ان الاساس اذا كان اكبر من الواحد كانت لوغاريتات الاعداد التى

فوق الواحد موجبة ولوغاريتات الاعداد التى دون الواحد سالبة ولوغاريتهم

الصفر - ∞

الاعداد التي ليست من القوى العجيبة لعدد ١٠ فانها تعين بعدد اعشاري واما الجزء الصحيح اللوغاريتم عددا كبيرا من الواحد فانه يحتوي على عدة من الاحاد مساوية لعدد ارقام هذا الجزء ناقصا واحدا لانا اذا رمزنا لعدد ارقام الجزء الصحيح بالرمز ω كان العدد محصورا بين ω و $\omega - 1$ وبناء على ذلك يكون لوغاريتمه محصورا بين $\omega - 1$ و ω وحيث ان يكون من كم من آحاد عددها $\omega - 1$ ومن جزء اعشاري اقل من الواحد ولذا اطلق على الجزء الصحيح من كل لوغاريتم اسم العدد الياني

* (في المنقسم اللوغاريتمى) *

المنقسم اللوغاريتمى لعدده هو لوغاريتمه مقلوب هذا العدد ويقال لاحد العددين مقلوب الاخر متى كان حاصل ضربهما مساويا للواحد فنجد $\frac{3}{4}$ او $\frac{4}{3}$ و $\frac{1}{4}$ يقال لكل منهما مقلوب الاخر وعليه اذا رمز بالرمز ω لعدد مقلوبه $\frac{1}{\omega}$ يحدث

$$\omega \times \frac{1}{\omega} = 1$$

وباختار لوغاريتم كل من الطرفين يحدث

$$\text{لوغا } \omega + \text{لوغا } \frac{1}{\omega} = \text{لوغا } 1 = 0 \quad \text{ومنها يؤخذ}$$

$$\text{لوغا } \frac{1}{\omega} = - \text{لوغا } \omega$$

اعني ان المنقسم اللوغاريتمى لعدديساوي لوغاريتم العدد بعلامة مخالفة لعلامته بحيث ان الجداول اللوغاريتمية لا تحتوى الاعلى لوغاريتمات الاعداد العجيبة يلزم لايجاد لوغاريتم كسر ان تطبق عليه القاعدة المتقدمة في (بند ١٠٨) ومتى كان الكسر المفروض اقل من الواحد ممكن تعيين لوغاريتمه السالب على وجهه يكون حظه الاعشاري موجبا ولذا يلزم ان يضاف بالاخير على لوغاريتم البسط عدد من الاحاد حتى يتيسر ان يطرح منه لوغاريتم المقام ويطرح هذا العدد من الباقي مثال ذلك ان يكون لوغاريتم البسط 1.3490862 ولوغاريتم المقام 3.0842761 فيلزم ان يطرح

اللوغاريتم

اللوغاريتم الثاني من الاول بعد ان يضاف اليه ٣ فيصير ٠.٧٦٥٣١٠١
وحيث انه يلزم ان يطرح ٣ من هذا الباقي يكتب هكذا

$$\overline{٣,٧٦٥٣١٠١} \quad .$$

والعلامة — الموضوعة فوق العدد الياني لا تتعلق بغيره

فاذا اردت تغيير المقدار $\overline{٣,٧٦٥٣١٠١}$ بانجر مكافئ له الا انه سالب

$$\text{شوه دان } \overline{٣,٧٦٥٣١٠١} = \overline{٣} - ٠,٧٦٥٣١٠١ =$$

$$-٢ - (٠,٧٦٥٣١٠١ - ١) = -٢,٢٣٤٦٨٩٩ \text{ وهذا}$$

التحويل يؤخذ من طرح واحد من المقدار المطلق للعدد الياني وطرح الرقم
الاول عن بين الجزء الاعشارى من ١٠ وباقي الارقام الاعشارية

من ٩

ويلزم لتحويل اللوغاريتم سالب بالكلية الى مقدار جزؤه الاعشارى موجب

(اى الى المتق اللوغاريتمى) ان يجرى على الجزء الاعشارى من اللوغاريتم

السالب ما جرى عليه في الحالة السابقة ويضاف الى العدد الياني واحد لان

$$-٢,٢٣٤٦٨٩٩ = -٢ - ٠,٢٣٤٦٨٩٩ =$$

$$\overline{٣,٧٦٥٣١٠١} = -٢ + (-٠,٢٣٤٦٨٩٩)$$

واذا اردت ضرب اللوغاريتم $\overline{٣,٧٦٥٣١٠١}$ في عدد صحيح كالعدد

٤ مثلاً فان حاصل الضرب يكتب هكذا

$$\overline{٣,٧٦٥٣١٠١} \times ٤ = \overline{٣} - ٠,٦١٢٤٠٠٤ \text{ ومضى}$$

كان اللوغاريتم مركباً من عددي ياني سالب وجزء اعشارى موجب واريد

قسمة على عدد صحيح لزم ان يؤخذ خارج قسمة العدد الياني على وجهه

يكون الباقي موجباً مثال ذلك ان يقسم $\overline{٧,٣٢٩٥٦٤٢}$ على ٣ فيكون

خارج قسمة ٧ على ٣ هو ٢ والبقى ١ او خارج القسمة

— ٣ والباقي + ٢ وبادامة العمل يحدث ٣٧٧٦٥٢١٤ و ٣
وهو الناتج المطلوب

(١١٣) يؤخذ من القواعد المتقدمة في (بند ٨٠٦) ان

$$\text{لوغا } (١٠ \times ٢) = \text{لوغا } ٢ + \text{لوغا } ١٠ = \text{لوغا } ٢ + ٣,$$

$$\text{لوغا } \left(\frac{٢}{١٠}\right) = \text{لوغا } ٢ - \text{لوغا } ١٠ = ٢ - ٣$$

ومن هنا ينتج ان لوغاريتم حاصل ضرب عدد في القوى الصحيحة لعدد ١٠ او خارج قسمته عليه يكون مساويا للوغاريتم هذا العدد مضافا اليه او مطروح منه آحاد صحيحة بقدر درجة القوة الصحيحة للعدد ١٠

وحينئذ يسهل معرفة العدد البياني للوغاريتم عدد اعشاري اصغر من الواحد لانه اذا رمز بالرمز ح لعدد الاضمار الموجودة بين الشرطة واول رقم معنوي يوجد عن يمينها كان العدد المقروض اصغر من $\frac{١}{١٠}$ واكبر من

$$\frac{١}{١٠ + ح} \text{ وحينئذ يكون لوغاريتم هذا العدد محسورا بين } ح \text{ و } -(١ + ح)$$

اعني ان هذا اللوغاريتم يكون مساويا $-(١ + ح)$ مضافا اليه جزء اعشاري موجب او مساويا $ح$ مضافا اليه جزء اعشاري سالب ومن ههنا ينتج

اولا انه متى كان الجزء الاعشاري للوغاريتم عدد اعشاري اصغر من الواحد موجبا كان عدده البياني مساويا للعدد الدال على مرتبة اول رقم معنوي يوجد عن يمين الشرطة من العدد المقروض .

وثانيا انه متى كان اللوغاريتم سائبا بالكلية كان عدده البياني اقل واحد من العدد الدال على مرتبة اول رقم معنوي يوجد عن يمين الشرطة في العدد المقروض وعلى ذلك يكون العدد البياني الموجب او السالب للوغاريتم دالا على اعظم اعداد العدد الذي ينسب اليه هذا اللوغاريتم

في استعمال الجداول اللوغاريتمية

في العمليات الحسابية

(١١٤) استعمل هذه الجداول في العمليات الحسابية يرجع الى مسألتين (الاولى) ان يكون المعلوم عددا والمطلوب إيجاد لوغاريتمه (الثانية) ان يكون المعلوم لوغاريتم عدد والمطلوب إيجاد هذا العدد ويكفي في ذلك ان نشرح جدول اللوغاريتمات المعرب مطبقا عليه المستلثان المذكورتان فبقول

* (في شرح جدول اللوغاريتمات المعرب واستعماله) *

(١١٥) هذا الجدول يتركب من ثلاثة اجزاء احدها يشتمل على لوغاريتمات الاعداد من الواحد الى ١٠٠٨٠ وهو عبارة عن اربع وثلاثين صحيفة كل صحيفة مشتملة على ستة صفوف رأسية معنونة على التوالي بلفظي اعداد وانساب اي لوغاريتمات وكل صف مقسوم الى ثمانية اقسام كل منها يشتمل على خمسة اعداد والصف المعنون بلفظة انساب يوحد تلو الصف المعنون بلفظة اعداد عن يساره بحيث يرى كل عدد من الاول موضوعا على يسار العدد المنسوب اليه من الثاني وجميع اعداد الصف المعنون بلفظة انساب مركب من ثمانية ارقام اولها من جهة اليسار العدد البياني والارقام السبعة الباقية هي الجزء الاعشاري من اللوغاريتم وجميع الاعداد البيانية هي الارقام الموصوعة في كل صف تحت العلامة ~ الموصوعة تحت لفظة انساب في رأس كل صف من جهة اليسار ولنشرع في تطبيق الجدول المذكور على المسألتين المذكورتين بقول

* (المسئلة الاولى العملية) *

(١١٦) اذا كان المطلوب تحصيل اللوغاريتم المنسوب لعدد معلوم يقال اولا اذا كان العدد المعلوم صحيحا واصغر من ١٠٠٨٠ لم ان يبحث عنه في الصف المعنون بلفظة اعداد ويؤخذ العدد المحاذي له الذي يوجد على يساره من الصف المعنون بلفظة انساب فيكون هذا العدد هو اللوغاريتم

المطلوب

مثال ذلك ان يكون العدد المقروض ٤٥١٧ فيبحث عنه في الصوف
المسونة بلفظة اعداد فيشاهد انه العدد الثالث من اعداد المقسم الثامن من
الصف الثالث المعنون بلفظة اعداد من (صحيفة ٣٩) وحيث يكون العدد
٣٦٥٤٨٥٠١ الموضوع على يسار ٤٥١٧ هو اللوغاريتم المطلوب
الذي يوضع هكذا لو ٤٥١٧ = ٣٦٥٤٨٥٠١ فيثبت يكون

لو ١٠ = ٠.٠٠٠٠٠٠٠٠ و لو ٣١٥ = ٣١٥٨٣١٠٦
ولو ١٥ = ١٥١٧٦٠٩١٣ و لو ٨٩١٥ = ٣٦٥٠١٢١٣
وثانيا اذا كان العدد المعلوم صحيحا وكبر من ١٠٠٨٠ لزم تحويله الى
عدد اعشاري محصور بين ١٠٠٠ و ١٠٠٨٠

مثال ذلك ان يكون المطلوب تعيين لوغاريتم العدد ١٨٩٣٦٧ فيقال
حيث ان $١٨٩٣٦٧ = ١٨٩٣٦٧ \times ١٠٠$ يكون لوغاريتم العدد
١٨٩٣٦٧ بمقتضى (بنده ١١٣) مساويا للوغاريتم العدد ١٨٩٣٦٧
مضافا اليه العدد ٢ وبناء على ذلك يكتب لتعيين اللوغاريتم المطلوب ان
يعين لوغاريتم العدد ١٨٩٣٦٧ هذه المثابة وهي ان يقال

حيث ان العدد ١٨٩٣٦٧ محصور بين ١٨٩٣ و ١٨٩٤
يكون لوغاريتمه محصورا بين اللوغاريتمين الجدولين ٣٦٧٧١٥٠٦ و ٣٦٧٧٣٨٠٠
و ايه يلزم ايجاد الكمية سه التي يرا د اضافتها الى اللوغاريتم ٣٦٧٧١٥٠٦
المسوي للعدد ١٨٩٣ ليتكون من ذلك لوغاريتم العدد ١٨٩٣٦٧
بان يؤخذ الفرق ٢٢٩٤.٠٠٠ بين اللوغاريتمين الجدولين المسويين
للعدين ١٨٩٤ و ١٨٩٣ ويقال ان نسبة الفرق ١ بين العددين
١٨٩٣ و ١٨٩٤ المتواليين الحاصرين بينهما العدد ١٨٩٣٦٧
الى الفرق ٢٦٧.٠ بين العدد المعلوم والعدد ١٨٩٣٦٧ كنسبة
الفرق ٢٢٩٤.٠٠٠ بين اللوغاريتمين الجدولين المسويين للعددين

الحاصلين بينهما العدد المعلوم إلى الفرق منه بين أصغر اللوغاريتمين
الجدولين واللوغاريتم المطلوب معنى

$$١ : ٠.٦٧ : ٠.٠٠٠٢٢٩٥ :: ٥ : ٠.٠٠٠١٥٣٧ = \text{فيثبت منه}$$

ثم يضاف مقدار منه إلى اللوغاريتم ٣.٢٧٧١٥٠٦ المنسوب
للعدد ١٨٩٣ فالمجموع $٣.٢٧٧٣٠.٤٣$ يكون لوغاريتم العدد
 ١٨٩٣.٦٧ فيثبت في يكون لوغاريتم العدد ١٨٩٣.٦٧ هو
 $٥.٢٧٧٣٠.٤٣$ وبهذه المثابة يتعين لوغاريتم أي عدد صحيح

وثالثا إذا اريد تعيين لوغاريتم كسر اعتيادي لم أن يطرح لوغاريتم البسط
من لوغاريتم المقام كما تقدم في (بند ١٠٨)

لكن إذا كان الكسر أكبر من الواحد أحرث عملية الطرح كما ذكر فيكون
الباقى هو اللوغاريتم المطلوب وإذا كان الكسر دون الواحد لم أن يطرح
لوغاريتم البسط من لوغاريتم المقام ثم يقرن السابق بعلامة - فيكون
الناح لوغاريتم الكسر المقروض

تنبيه * إذا كان المطروح أكبر من المطروح منه وجب أن يطرح الأصغر
من الأكبر ثم يقرن السابق بعلامة - فبناء على ذلك يكون

$$\text{لوغا } \frac{١٥}{٧} = ٠.٣٣٠٩٩٣٣ \text{ و لوغا } \frac{٧}{١٥} = -٠.٣٣٠٩٩٣٣$$

وبما إذا كان المطلوب تعيين لوغاريتم عدد اعشاري يقال حيث أن
العدد الاعشاري يكافئ كسر اعتيادي أسطه العدد الصحيح الحادث من تجريد
العدد المعروف من الشرطة ومقامه واحد متبوع بأصفار عددها كعدد
الأرقام الاعشارية الموجودة على يمين الشرطة هي مقصي ما تقرر في تعيين
لوغاريتم كسر اعتيادي يلزم لتحويل لوغاريتم عدد اعشاري أن يعبر لوغاريتم
العدد الصحيح الحادث من حذف الشرطة من العدد المعروف ويطرح منه
أحاد بقدر الأرقام الاعشارية الموجودة في العدد المعروف لأن لوغاريتم
الواحد المتبوع بمجملة أصفار هو عدد الأصفار المنكورة كما في (بند ١١٣)

لكن اذا كان العدد الاعشارى المفروض اكبر من الواحد كان لوغاريتمه موجبا فاذا كان المطلوب مثل تعيين لوغاريتم العدد ١٨٩٣٦٧ لزم ان يبحث عن اللوغاريتم ٥٠٤٣ ٢٧٧٣٠٤٣ المتسبب للعدد ١٨٩٣٦٧ ويطرح منه الرقم ٤ فيكون الباقي ٥٠٤٣ ٢٧٧٣٠٤٣ هو اللوغاريتم المطلوب واذا كان العدد الاعشارى المفروض اصغر من الواحد كان لوغاريتمه سالبا فاذا كان المطلوب مثل تعيين لوغاريتم العدد ٠٠٠١٨٩٣٦٧ لزم ان يقطع النظر فى مبدأ الامر عن الشرطه ويبحث عن لوغاريتم العدد ١٨٩٣٦٧ فيكون ٥٠٤٣ ٢٧٧٣٠٤٣ وحيث ان العدد المعلوم مركب من ثمانية ارقام اعشارية يلزم لتحصيل لوغاريتمه ان يطرح من اللوغاريتم ٥٠٤٣ ٢٧٧٣٠٤٣ الرقم ٨ وبناء على ذلك يكون العدد ٥٠٤٣ ٢٧٧٣٠٤٣ - ٨ هو اللوغاريتم المطلوب ويلزم لايجاد الساقى المذكور ان يطرح ٥٠٤٣ ٢٧٧٣٠٤٣ من ٨ ويقرن الباقي بعلامة - فيكون الناتج - ٢٧٢٢٦٩٥٧ هو لوغاريتم العدد ٠٠٠١٨٩٣٦٧

ويمكن ايضا كما فى (سند ١١٢) تحويل اللوغاريتم - ٢٧٢٢٦٩٥٧ الى لوغاريتم عدده اليبانى سالب فقط بلاحظه ان لوغا ٠٠٠١٨٩٣٦٧

$$= ٥٠٤٣ ٢٧٧٣٠٤٣ - ٨ = ٥٠٤٣ ٢٧٧٣٠٤٣ + ٥ = ٨ - ٥ = ٨$$

$$+ ٥٠٤٣ ٢٧٧٣٠٤٣ = ٥٠٤٣ ٢٧٧٣٠٤٣ + ٣ - = ٥٠٤٣ ٢٧٧٣٠٤٣$$
والعلامة - الموضوعة فوق العدد ٣ تدل على انه سالب فقط

(المسئلة الثانية العملية)

(١١٧) لئذا علم لوغاريتم وكان المطلوب تعيين العدد الذى يسبب اليه يقال
اولا اذا كان اللوغاريتم المعلوم موجبا كان العدد المنسوب اليه اكبر من الواحد وحيث يدىكون العدد اليبانى بعد ان يضاف اليه واحد الا كما
فى (سند ١١٢) على عدد ارقام الجزء الصحيح من العدد المتسبب الى اللوغاريتم المعلوم

اذا تقرر ذلك يقال اذا كان العدد اليبانى للوغاريتم معلوم قدره ٣ كان

العدد المنسوب اليه هذا اللوغاريتم محصورا بين ١٠٠٠ و ٢٠٠٠
ولتحصيل هذا العدد يبحث عن اللوغاريتم المعلوم في الصفوف المعونة بلفظة
انساب فان وجد اللوغاريتم المذكور في الجدول كان العدد المنسوب اليه
موصوعا على قيمته في الصف المعنون بلفظة اعداد

وبناء على ذلك بشاهدان اللوغاريتمات ٣٢٥٦٠٩٨٢ و ٣٢٧٧١٥٠٦
و ٣٢٧٧٣٨٠٠ منسوبة للاعداد ٤٥٣٠ و ١٨٩٣
و ١٨٩٤

واذا كان اللوغاريتم المعلوم الذي عدده البياي ٣ ليس موجودا في الجدول
لرم حصره بين لوغاريتمين متواليين جدوليين منسوبين لعددتين صحيحين
متواليين فيكون اصغر هذين العددين هو الجزء الصحيح من العدد الاعشاري
المنسوب اليه اللوغاريتم المعلوم

واما الجزء الاعشاري المنسوب للعدد المطلوب فيتعين بهذه الكيفية وهي ان
يقال نسمة الفرق بين اللوغاريتمين الجدولين الحاصرين بينهما اللوغاريتم
المعلوم الى الفرق بين اللوغاريتم المعلوم واصغر اللوغاريتمين الجدولين كنسبة
واحد الى الجزء الاعشاري من المنسوب اليه اللوغاريتم المعلوم
ومقدار من المستخرج من هذه النسبة يكون في العادة مبنائا لـ
ارقام فاذا كان المعلوم اللوغاريتم ٣٢٧٧٣٠٤٣ مثلا

شاهد في الجدول ان هذا اللوغاريتم محصور بين اللوغاريتمين ٣٢٧٧١٥٠٦
و ٣٢٧٧٣٨٠٠ المنسوبين للعددين ١٨٩٣ و ١٨٩٤
وبناء على ذلك يكون الجزء الصحيح من العدد المطلوب هو ١٨٩٣ واما
الجزء الاعشاري من هذا العدد فيلزم تعيينه ان يبحث في مبدأ الامر عن
الفرق ٠٠٠٢٢٨٤ بين لوغاريتمين العددين ١٨٩٣ و ١٨٩٤
ثم عن الفرق ٠٠٠١٥٣٧ بين اللوغاريتم المعلوم واصغر اللوغاريتمين
الجدولين ثم توضع النسبة

موجبا ومساويا للرقم ٢. ثم يبحث عن العدد المنسوب الى هذا اللوغاريتم
الجديد وتقدم الشرطة منازل جهة يسار هذا العدد بقدر الاحاد التي اضيفت
الى العدد البياى فاذا اريد ايجاد العدد الذى لوغاريتمه ٢,٢٧٧٣.٤٣ مثلا

نخرج مما تقدم ان $\overline{٢,٢٧٧٣.٤٣} = ٣ - ٢,٢٧٧٣.٤٣ + ٣$ وناء على ذلك اذا اضفنا الرقم ٦ للوغاريتم المعلوم صار الناتج
٢,٢٧٧٣.٤٣ (لان $٢,٢٧٧٣.٤٣ - ٣$ بعد اضافة الرقم ٦ اليه يصير $٢,٢٧٧٣.٤٣ + ٦ - ٣$) ثم يبحث عن العدد
الذى ينسب اليه هذا الناتج فيناهدانه ١٨٩٣,٦٧ ثم تقدم الشرطة
ستة منازل جهة اليسار (لانا اضفنا الرقم ٦ الى اللوغاريتم المفروض)
فيكون الناتج ٠.٠٠١٨٩٣٦٧ هو العدد المطلوب

(١١٨) هذا ما يتعلق بالجزء الاول وهو المشغل على لوغاريتمات الاعداد
من ١ الى ١٠٠٨٠ واما الجران الاحران فلم تصد لكرهماها
لتوقعهما على امور خاصة نعلم حساب المثلثات عن اراد الوقوف على
حقيقتهم ما فعل به بالاطلاع على العلم المذكور

(١٦٠)

• (السابع الخامس) •

في مسائل بطلها بقواعد هذا المختصر وتطبيقها عليها تترن التلامذة وتقوى ملكتهم في هذا العلم وهي مرتبة بحسب ترتيب قواعده .

• (مسائل تخص الدرجة الاولى) •

• (المسئلة الاولى) •

كومتان من القلل محتويتان على ٣٤٤ قلة تريد احدهما عن الاخرى بمقدار ٦٤ قلة فما يكون عدد القلل الموجودة في كليهما
فالجواب عن ذلك ان يفرض سم عدد القلل الموجودة في صغرى الكومتين فيكون $\text{سم} + ٦٤$ عدد القلل الموجودة في الكومة الكبرى فبما
على ما تقدم ينصل

$$\text{سم} + \text{سم} + ٦٤ = ٣٤٤ \text{ اى}$$

$$٢ \text{ سم} + ٦٤ = ٣٤٤ \text{ ومنها يستخرج}$$

$$\text{سم} = ١٤٠ \text{ قلة وهو العدد الاصح}$$

وحيث كان العدد الاكبر مساويا للكمية $\text{سم} + ٦٤$ يكون مساويا للكمية $١٤٠ + ٦٤$ المساوية للكمية ٢٠٤ بمعنى انه يوجد في احدى الكومتين ١٤٠ قلة وفي الاخرى ٢٠٤* وتحقيق ذلك ان
مجموعهما يساوى ٣٤٤ وفاصلهما يساوى ٦٤

• (المسئلة الثانية) •

ثلاث قلل عبارة الاولى ١٢ بوصه والثانية ١٠ بوصات والثالثة ٨ رنة
الجميع ٥٤٣ كيلو حراما لكن الاولى تريد عن الثانية بمقدار ٢٢ كيلو حراما
والثانية عن الثالثة بمقدار ٢٩ كيلو حراما فما تكون رنة كل قلة
من القلل الثلاث

فالجواب عن ذلك ان يقال اذا مررنا بالحرف سم رنة القلة التي عيارها
٨ بوصات يكون $\text{سم} + ٢٩$ رنة القلة التي عيارها ١٠
بوصات و $\text{سم} + ٢٢ + ٢٩$ اى $\text{سم} + ٥١$ رنة

(١٦١)

القلة التي عيارها ١٢ بوصة وحيث كانت زنة الثلاث قتل تبلغ ١٤٣ كيلوجراما يحدث

$$\begin{aligned} \text{م} + \text{م} + \text{م} + ٢٩ + \text{م} + \text{م} + ٥١ &= ١٤٣ \text{ او} \\ ٣ \text{ م} + ٨٠ &= ١٤٣ \text{ ومنها يستخرج} \\ \text{م} &= ٤١ \end{aligned}$$

معنى ان زنة القلة التي عيارها ٨ بوصات يكون ٢١ كيلوجراما فتكون حيث زنة القلة التي عيارها ١٠ بوصات ٢١ + ٢٩ اى ٥٠ كيلوجراما وزنة القلة الثالثة التي عيارها ١٢ بوصة ٥٠ + ٢٢ اى ٧٢ كيلوجراما وتحقيق ذلك ان زنة الثلاث قتل تساوى ١٤٣ كيلوجراما

•(المسئلة الثالثة)•

اذا كان المطلوب قسمة ٢١٣٧٥ خرطوشا على ثلاث فرق من العساكر قواها مناسبة للاعداد ٣ و ٥ و ١١ اى ان قوة الاولى على $\frac{٣}{٥}$ قوة الثانية وعلى $\frac{٣}{١١}$ من قوة الثالثة

فالجواب عن ذلك ان يفرض ان م عدد الخراطيش اللازمة للفرقة الاولى و ٥ م عدد خراطيش الثانية و ١١ م عدد خراطيش الفرقة الثالثة (وانما اخترنا هذه القروض للفرق الثلاثة لوجهين الاول ان ٣ م عبارة عن $\frac{٣}{٥}$ العدد ٥ م وعن $\frac{٣}{١١}$ من العدد ١١ م والثاني تناسب هذه القروض مع الاعداد ٣ و ٥ و ١١) فبث كان مجموع هذه الاجراء الثلاثة يعادل ٢١٣٧٥ يحدث

$$\begin{aligned} ٣ \text{ م} + ٥ \text{ م} + ١١ \text{ م} &= ٢١٣٧٥ \text{ اى} \\ ١٩ \text{ م} &= ٢١٣٧٥ \text{ ومنها يستخرج} \\ \text{م} &= \frac{٢١٣٧٥}{١٩} = ١١٢٥ \end{aligned}$$

وحيث ينبغي ان يكون ما يخص الفرقة الاولى ١١٢٥×٣ اى ٣٣٧٥ خرطوشا وما يخص الثانية ١١٢٥×٥ اى ٥٦٢٥ وما يخص الثالثة

•(٢١)•

١١. X ١١٢٥ اى ١٢٣٧٥ وتحقيق ذلك ان المجموع يساوى ٢١٣٧٥ وهالطريقة اخرى للحل هي
 ان يرمز بالحرف س لعدد خراطيش الفرقة الاولى فيكون $\frac{٥}{٣}$ هو
 عدد خراطيش الفرقة الثانية و $\frac{١١}{٣}$ عدد خراطيش الفرقة الثالثة ومن
 ذلك تحدث هذه المعادلة $س + \frac{٥}{٣} + \frac{١١}{٣} = ٢١٣٧٥$ وبحل
 هذه المعادلة واستخراج مقدار س منها يوجد $س = ٣٣٧٥$ خرطوشا
 فحينئذ يكون عدد خراطيش الفرقة الثانية ٥٦٢٥ وعدد خراطيش
 الفرقة الثالثة ١٢٣٧٥ •

• (المسئلة الرابعة) •

اذا كان المطلوب معرفة اللظات التى يتلاقى فيها عقربا الساعات والدقائق
 لساعة ما

فالجواب عن ذلك ان يقال من الواضح ان تلاقى العقربين قد يقع وقت
 الغروب فحينئذ لا حاجة لسا به والغرض انما هو البحث عن التلاقيات للآخر
 المتتابعة الواقعة بعد التلاقى المذكور فنقول

يرمز بالحرف هـ للمحيط بتمامه وبالحرف س للمسافة التى قطعها عقرب
 الساعات من وقت الغروب الى وقت التلاقى الاول فيكون ١٢ س هـ
 للمسافة التى قطعها عقرب الدقائق فى الوقت المذكور وهذه المسافة
 عبارة عن المحيط زائد المسافة س اعنى ان ١٢ س هـ + س
 ويستنتج من هذه المعادلة $س = \frac{١٢}{١١} هـ$ وحيث ان عقرب الساعات
 يقطع المحيط بتمامه فى مدة ١٢ ساعة يقطع المسافة $\frac{١٢}{١١} هـ$ فى $\frac{١٢}{١١}$ من
 ساعة

الساعة اى فى $\frac{١}{١١}$ وبناء على ذلك فليطاط التقابلات المتتابعة

ساعة	ساعة	ساعة	ساعة	ساعة	ساعة	ساعة	ساعة
٦	$\frac{٧}{١١}$	$\frac{٨}{١١}$	$\frac{٩}{١١}$	$\frac{١٠}{١١}$	$\frac{١١}{١١}$	١	٢
٣	$\frac{٤}{١١}$	$\frac{٥}{١١}$	$\frac{٦}{١١}$	$\frac{٧}{١١}$	$\frac{٨}{١١}$	$\frac{٩}{١١}$	$\frac{١٠}{١١}$
٠	$\frac{١}{١١}$	$\frac{٢}{١١}$	$\frac{٣}{١١}$	$\frac{٤}{١١}$	$\frac{٥}{١١}$	$\frac{٦}{١١}$	$\frac{٧}{١١}$

• (١٦٢) •

وهذا بعض مسائل بسيطة لتمرين المبتدى اقصرا على بيان نتائج حلها
لتحقيق ما يجده الطالب

• (المسئلة الاولى) •

رجل عمره ثمانية أمثال عمر ولده وبمجموع عمرهما ٣٦ سنة فإيكون عمر
كل منهما

فالجواب ان عمر الولد ٤ سنوات وعمر والده ٣٢ سنة

• (المسئلة الثانية) •

تليذ ان ذهب الى المكتب اخذ مجازاة له ٨ ٢ وان لم يذهب دفع عقابه
٣٠ فبعد مضي ثلاثين يوما وجد معه ٣٠ ٦ فما يكون قدر ايام
البطالة وقدر ايام الشغل

فالجواب ان قدر ايام الشغل ١٥ يوما كقدر ايام البطالة

• (المسئلة الثالثة) •

قتلان زنة احدهما ٣٦ رطلا وزنة الاخرى ٢٤ رطلا ومجموع قطريهما
٣١٥ ميليميترا وفاضلهما ٢١ ميليميترا فما مقدار كل من القطرين
فالجواب ان قطر الاولى ١٦٨ ميليميترا وقطر الاخرى ١٤٧

• (المسئلة الرابعة) •

تاجر اشترى مقدار من الخطب وباعه فاكسب مبلغا قدره ٢٠٠٠ مضمرا
انه ربح في كل مائة ١٠ من المبلغ المباع فإيكون قدر رأس ماله الذي
اشترى به الخطب المذكور

فالجواب ان رأس المال ١٨٠٠٠

• (المسئلة الخامسة) •

مخلوط قدره ١٧ رطلا من كبريت من ١٥ رطلا من ملح البارود و ٢ من
الكبريت فما يكون الكمية التي يلزم اضافتها على هذا المخلوط من ملح البارود
بحيث يكون موجودا في كل ١٧ رطلا من هذا المخلوط $\frac{1}{4}$ رطل من
الكبريت فقط

(١٦٤)

فالجواب عن ذلك انه يلزم اضافة ٥١ رطلا من ملح البارود
ولذلك مسائل مطبقة على حل معادلتين كما ذكر في الجداول فاكتر

• (المسئلة الاولى) •

يجلان من الدانات احدهما مركبة من ١٢ دانة عيار كل منها ٨ ومن
١٨ دانة عيار كل منها ٦ وزنة المجموع ٤٦٩,٩٢٥ كيلوجراما
والاخرى مركبة من ٢٠ دانة عيار كل منها ٨ ومن ١٥ عيار كل منها
٦ وزنة المجموع ٦٠٦,٩٨٧ كيلوجراما فلتكون زنة كل دانة منها
فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف x زنة الدانة التي عيارها
وبالحرف y زنة الدانة التي عيارها ٦ فنصت هاتين المعادلتان

$$12x + 18y = 469,925$$

$$20x + 15y = 606,987$$

ولاستخراج x من هاتين المعادلتين ننحذف y منهما بان يسخر

$$\frac{12x + 18y = 469,925}{18} = \frac{20x + 15y = 606,987}{15}$$

$$\frac{12x + 18y = 469,925}{18} = \frac{20x + 15y = 606,987}{15}$$

وبتدوية هذين المقدارين يعضهما فنجد هذه المعادلة

$$\frac{12x + 18y = 469,925}{18} = \frac{20x + 15y = 606,987}{15}$$

$$12x + 18y = 469,925 \quad 180x + 270y = 8458,650$$

$$20x + 15y = 606,987 \quad 180x + 270y = 8458,650$$

$$12x + 18y = 469,925 \quad 180x + 270y = 8458,650$$

$$20x + 15y = 606,987 \quad 180x + 270y = 8458,650$$

$$12x + 18y = 469,925 \quad 180x + 270y = 8458,650$$

$$20x + 15y = 606,987 \quad 180x + 270y = 8458,650$$

$$12x + 18y = 469,925 \quad 180x + 270y = 8458,650$$

$$20x + 15y = 606,987 \quad 180x + 270y = 8458,650$$

$$12x + 18y = 469,925 \quad 180x + 270y = 8458,650$$

$$20x + 15y = 606,987 \quad 180x + 270y = 8458,650$$

$$12x + 18y = 469,925 \quad 180x + 270y = 8458,650$$

$$20x + 15y = 606,987 \quad 180x + 270y = 8458,650$$

• (المسئلة الثانية) •

مدفع عياره ١٦ مركب من نحاس وقصدير زنته ٢٠١٠,٦٤٠
كيلوجراما أو ٢٠١٠,٦٤٠ جراما وجمعه ٢٢٣ دسيميترامكعا

بمرض

بغرض ان زنة الديسيميتر المكعب من النحاس يساوى ٩٢٥٠ جراما
وزنة الديسيميتر المكعب من القصدير يساوى ٧٣٢٠ جراما فتكون زنة
كل من النحاس والقصدير ..

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف صه لعدد الديسيميترات المكعبة من النحاس
وبالحرف صه لعدد الديسيميترات المكعبة من القصدير فيحدث بالطر
لديسيميترات المكعبة هذه المعادلة صه + صه = ٢٢٣ ويحدث
بالطر الزنة ٩٢٥٠ صه + ٧٣٢٠ صه = ٢٠١٠٦٤٠

ثم يستخرج من المعادلة الاولى صه = ٢٢٣ - صه ومن الثانية
صه = $\frac{٢٠١٠٦٤٠ - ٧٣٢٠ \times ٢٢٣}{٩٢٥٠}$ ومن هاتين المعادلتين يستخرج
صه = $\frac{٢٠١٠٦٤٠ - ٧٣٢٠ \times ٢٢٣}{٩٢٥٠}$ - صه أو

$$\text{صه} = \frac{٥٢١١٠}{١٩٣} = ٢٧$$

فعلى ذلك يوجد في المدفع المذكور ٢٧ ديسيميتر مكعبا من القصدير
و ٢٢٣ - ٢٧ اى ١٩٦ ديسيميتر مكعبا من النحاس

فاذا ضرب ٩٢٥٠ جراما في ١٩٦ وجد ان زنة النحاس ١٨١٣٠٠٠
جراما واذا ضرب ٧٣٢٠ جراما في ٢٧ وجد ان زنة القصدير
١٩٧٦٤٠ جراما وتحقيق ذلك ان زنة المجموع ٢٠١٠٦٤٠ جراما

(المسئلة الثالثة)

مائة قة من بارود المدافع مكوّنة من ملح البارود والكبريت والفحم بشرط ان
ثلاثة امثال زنة ملح البارود تعادل زنة الفحم ١٣ مرة مضافا عليها خمسة
امثال زنة الكبريت وان خمسة امثال زنة الملح تعادل زنة الكبريت ٣٧ مرة
مطروحا منها سبعة امثال زنة الفحم فتكون زنة كل من المواد الثلاث

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف صه لزنة الملح الكائن في الخليط وبالحرف
صه لزنة الكبريت كذلك وبالحرف ع لزنة الفحم كذلك فيحدث أولا

$$\text{صه} + \text{صه} + \text{ع} = ١٠٠$$

(١٦٦)

ومن الشرط الاول $٣ ص = ٥ ص + ١٣ ع$

ومن الشرط الثاني $٥ ص = ٣٧ ص - ٧ ع$

وباستخراج ص من الاولى والثانية والثلثة يحدث .

$$٣ ص = ١٠٠ ص - ع و$$

$$ص = \frac{١٣ + ٣٧ ص}{٣} ع و$$

$$ص = \frac{٣٧ ص - ٧ ع}{٥} ع$$

وبنسوية اول مقدارين مقدار ثلث مقدار المجهول ص يحدث

$$\frac{١٣ + ٣٧ ص}{٣} ع = ١٠٠ ص - ع و$$

$$\frac{٣٧ ص - ٧ ع}{٥} ع = ١٠٠ ص - ع$$

وبحذف المقامات يحدث على التوالى

$$٥ ص + ١٣ ع = ٣٠٠ ص - ٣ ع و$$

$$٣٧ ص - ٧ ع = ٥٠٠ ص - ٥ ع$$

وبتحويل الحدود المشكلة على المجهول ص الى طرف واحد يحدث

$$٨ ص = ٣٠٠ - ١٦ ع \quad \text{و} \quad ٤٢ ص = ٥٠٠ + ٢ ع$$

$$\frac{٣٠٠ - ١٦ ع}{٨} ص = \frac{٥٠٠ + ٢ ع}{٢٢} ص$$

$$و \quad \frac{٣٠٠ - ١٦ ع}{٨} ص = \frac{٥٠٠ + ٢ ع}{٢٢} ص$$

$$\frac{٣٠٠ - ١٦ ع}{٨} ص = \frac{٥٠٠ + ٢ ع}{٢٢} ص$$

وبنسوية مقدارى ص ببعضهما تحدث معادلة تحتوى على المجهول ع

فقط يستخرج منها $ع = \frac{١٠٧٥}{٨٦} = ١٢ \frac{١}{٢}$ وهو مقدار المجهول المذكور

وبوضع $١٢ \frac{١}{٢}$ بدل المجهول ع في اول مقدار المجهول ص يحدث

$$٨ ص = ٣٠٠ - ١٦ \times ١٢ \frac{١}{٢} = ٢٠٠ - ٢٠٠$$

وبوضع $١٢ \frac{١}{٢}$ بدل كل من المجهولين ص و ع في اول مقدار المجهول

ص يحدث

$$٧٥ = ٢٥ - ١٠٠$$

فعلى هذا تكون المائة اقه من بارود المدافع مركبة من ٧٥ اقه من ملح
البارود ومن $12\frac{1}{2}$ من الكبريت و $12\frac{1}{2}$ من القهم وبناء على ذلك فلي
البارود الداخل في تركيب بارود المدافع يكون $\frac{3}{4}$ الخلوط واما كل من
الكبريت والقهم فيكون $\frac{1}{8}$ الخلوط

وهالك مسائل من هذا القبيل يراد حلها من الطلبة

(المسئلة الاولى)

٢١٩ فرنكا يطلب عملها ٦٠ قطعة من المصكوكات قيمة بعضها ٥
فرنكات وقيمة البعض الآخر ٤ فرنكان فكم يلزم عمله من الصف الاول
وكم يلزم عمله من الصف الثاني
فالجواب انه يلزم عمل ٣٣ قطعة قيمة كل منها ٥ فرنكات و ٢٧
قطعة قيمة كل منها ٢ فرنكان

(المسئلة الثانية)

عرب فيها ٥٠ قلة عيار بعضها ١٢ اصعاً وعيار البعض الآخر ١٠ اصابع
ورنة كل قلة من العيار الاول ٧٢ كيلو حراماً وورنة كل قلة من العيار الثاني
٥٠ كيلو حراماً ووزنة مجموع القل ٢٦٩٨ كيلو حراماً فما يكون عدد
القل الموحدة في كل من النوعين
فالجواب عن ذلك ان عدد قل العيار الاول ٩ قلات وعدد قل العيار
الثاني ٤١ قلة

(المسئلة الثالثة)

١٠٠ تلميذ يشغلون اربعة ادوار من مدرسة بشرط ان تكون عدد
تلاميذ الدور الاول ضعف عدد تلاميذ الدور الرابع وان مجموع تلاميذ الدور
الثاني والثالث يعادل مجموع تلاميذ الدور الاول والرابع وان عدد تلاميذ
الدور الثالث $\frac{9}{7}$ تلاميذ الدور الثاني فكم يوجد من التلاميذ في كل دور من
الادوار الاربعة المذكورة
فالجواب عن ذلك انه يوجد ٢٠٠ تلميذ في الدور الاول و ١٧٥ في الدور
الثاني و ١٢٥ في الثالث و ١٠٠ في الرابع

(١٦٨)

• (المسئلة الرابعة) •

ثلاث صبر من خليط الغلال في شونة واحدة كل مائة اوقه من الصبرة الاولى
تحتوى على ٨٠ اوقه من القمح و ٢٠ اوقه من الذرة و ٨ اقات من
الشعير وكل مائة اقة من الصبرة الثانية تحتوى على ٧٥ اقة من القمح
و ١٥ اقة من الذرة و ١٠ اقات من الشعير وكل مائة اقة من الصبرة
الثالثة تحتوى على ٦٠ اقة من القمح و ٢٠ اقة من الذرة
و ٢٠ اقة من الشعير فما يلزم اخذه من كل صبرة لتكوين صبرة رابعة
ككل مائة اقة منها تحتوى على ٧٣ اقة من القمح و ١٥ من الذرة
و ١٢ من الشعير

فالجواب عن ذلك ان ما يلزم اخذه من الصبرة الاولى ٥٠ اقة ومن
الثانية ٢٠ اقة ومن الثالثة ٣٠ اقة

• (مسائل تحل بواسطة القواعد المقررة في الدرجة الثانية) •

• (المسئلة الاولى) •

من المقرر في علم الطبيعة ان الاجسام الساقطة تقطع مسافات مناسبة
بحريرات الازمنة الساقطة فيها فاذا قطع جسم ٤٩٠٤٥ امتار في مدة
سقوطه في اول ثانية فما يكون مقدار التواى اللازمة لسقوط الجسم المذكور
من ارتفاع قدره ١٣٢٥٣٤٧ ميتر

فالجواب عن ذلك ان ير من بالحرف صمة لعدد التواى اللازمة لسقوط الجسم
من الارتفاع المعين فمحدث هذه المناسبة

$$٤٩٠٤٥ : ١٣٢٥٣٤٧ :: ١ : صمة \text{ ومنها يستخرج}$$

$$صمة = \frac{١٣٢٥٣٤٧}{٤٩٠٤٥} = \frac{١٣٢٥٣٤٧}{٢٧٢٠٢} \text{ ومنها يستخرج}$$

$$صمة = ٧ \pm = \sqrt{٢٧٢٠٢} \pm ٥٢$$

ومقدارا

* (١٦٦) *

ومقداراً منه معا يحققان المعادلة $\frac{123,0347}{2,9025} = \sqrt{\text{س}}$ وأما المقدار
الموجب للجهول س وهو $2,9025$ تـوان فهو حل المسئلة

(المسئلة الثانية)

يمكن اعتبار الحرم الازمة لتماثل طابية كاسطوانات قائمة فاذا كان مقدار
من المواد كاف لصناعة ٢٥ حزمة قطر قاعدة كل منها ٣٢٥ ميليمترا
واريد عمل المقدار المذكور ٣٦ حزمة طولها كطول حرم النوع الاول
ها يكون قطر كل حزمة من هذا النوع الاخير

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س لقطر حزمة النوع الثاني وبالحرف
 م لحجم المقدار المذكور فيكون $\frac{\text{م}}{36} = \frac{\text{س}}{36}$ هو حجم اسطوانة النوع الاول و $\frac{\text{م}}{36}$
حجم اسطوانة النوع الثاني ومن حيث ان نسبة حجور الاسطوانات المتحدة
الارتفاع الى بعضها كنسبة مربعات اقطار قواعدهما كما هو مقرر في الهندسة
تحدث هذه المتناسبة

$$\frac{\text{م}}{36} : \frac{\text{م}}{36} :: (325) : \sqrt{\text{س}}$$

$$36 : 105625 :: 25 : \sqrt{\text{س}}$$

فنبتدئ

$$\sqrt{\text{س}} = \frac{105625 \times 25}{36} = \frac{2640625}{36} \text{ ومنها يستخرج}$$

$$\sqrt{\text{س}} = \frac{2640625}{36} \pm = \frac{2640625}{36} \pm$$

$$\pm = \frac{1625}{270.8} \pm$$

وحينئذ يكون القطر المطلوب ٢٧١ ميليمترا تقريبا و ١٠ اصابع

(المسئلة الثالثة)

من المعام ان خرنة الهون اسطوانة قائمة وان سعة خرنة الهون الذي عبار
١٢ اصعاً ٣٢٥ ميليمترا ~~م~~ كعباً وان سعة خرنة الهون الذي

(١٧٠)

عبارة ٨ اصابع تعادل ٢١٧ ميليترا ~~مكعبا~~ فاذا كان قطر قاعدة
الهُون الاول ١٢٦ ميليترا اعنى $\frac{8}{4}$ صه فليكون قطر الهون
الثانى بفرض ان عمق الحرتين واحد وان حرة الهون الاول تسع
اواق ط

١٦٩٣ جرام من الباروداى $\frac{1}{4}$ ٧ ٣ وان حرة الهون الثانى تسع
اوقية ط
٦٣٥ جرام من الباروداى $\frac{1}{4}$ ٢٠ ر

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف γ للقطر المطلوب ويلاحظ ان نسبة
حجوم الاسطوانات المتحدة الارتفاع الى بعضها كسمة مربعات اقطار
قواعد هار ان نسبة حجوم حزن الاهوان الى بعضها كنسبة زئات البارود
المحتوية عليه هذه الحزن الى بعضها فتحدث هذه المناسبة

١٦٩٣ : ٦٣٥ :: (١٢٦) : γ أى
 $\overline{1693} \gamma : \overline{635} \gamma :: 126 : \gamma$ ومنها يستخرج

$$\gamma = \frac{\overline{635} \gamma \times 126}{\overline{1693} \gamma} = \frac{635 \times 126}{1693}$$

$\gamma \times 126 = \frac{635 \times 126}{1693} = 0.375074 \times 126 = 0.612 \times 126 = 77$ ميليترا

فحيث يكون القطر المطلوب ٧٧ ميليتراى $\frac{8}{4}$ صه تقريبا

ك

(المسئلة الرابعة)

اذا كان ارتفاع الميل الداخلى لطاية استحكامات يعادل ٢٧٤ ر^٢ اى

اقدام γ وقاعدة تعادل ٧٥٨ ر^٢ اى $\frac{4}{2}$ صه اى ثلث الارتفاعها

يكون طول هذا الميل

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف γ لطول هذا الميل ويلاحظ ان

مراج

(١٧١)

مربع طول الميل المذكور يعادل مجموع مربعي ارتفاعه وقاعدته كما هو مقرر
في الهندسة فيجاء

$$م^2 = (٢٧٤,٢)^2 + (٧٥٨,٠)^2 \text{ اى}$$

$$م^2 = ٥٠٧٤٥٦٤٠ \text{ ومنها يستخرج}$$

$$م = \pm \sqrt{٥٠٧٤٥٦٤٠} = \pm ٢٢٣٩٧$$

حيث يكون طول الميل المذكور ٢٢٣٩٧

(المسئلة الخامسة)

ما العدد الذى اذا اضيف الى مربعه ١٣٢ يكون الناتج مساويا مقدار
هذا العدد ٢٣ مرة

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف م لهذا العدد قمده المعادلة

$$م^2 + ١٣٢ = ٢٣ م \text{ ومنها يستخرج}$$

$$م = \pm \frac{٢٣}{٢} \pm \sqrt{\frac{(٢٣)^2}{٤} - ١٣٢} = \pm \frac{٢٣}{٢} \pm \sqrt{\frac{٥٢٩}{٤}} \text{ او}$$

$$م = \frac{١ \pm ٢٣}{٢} = \frac{١ \pm ٢٣}{٢}$$

واذا رمت المقدارى م بالحرفين م و م يكون

$$م = \frac{١+٢٣}{٢} = ١٢ \text{ و}$$

$$م = \frac{١-٢٣}{٢} = ١١$$

حيث كل من العددين ١٢ و ١١ يحقق منطوق المسئلة

(المسئلة السادسة)

الاي اشترى مقدار من الخيل ببلغ ٤٥٠٠٠ غرش و آخر اشترى مقدارا

من الخيل يزيد عدده عن عدد خيل الاى الاول ١٥ حصانا

ببلغ قدره ٦٤٠٠٠ غرش بفرض ان ثمن الحصان الواحد من خيل

(١٧٢)

الالائى الثانى يتقص عن ثمن الحصان الواحد من خيل الالاي الاول مبلغ قدره ٢٠٠ غرش فكم يكون عدد خيول كل الاي وكم يكون ثمن كل حصان منها

فالجواب عن ذلك ان يرمن بالحرف سه لعدد خيل الالاي الاول فيكون سه + ١٥ عدد خيل الالاي الثانى و $\frac{٤٥٠٠٠}{\text{سه}}$ ثمن كل حصان من خيل الالاي الاول و $\frac{٦٤٠٠٠}{\text{سه}+١٥}$ ثمن كل حصان من خيل الالاي الثانى قصدت هذه المعادلة

$$\frac{٤٥٠٠٠}{\text{سه}} = \frac{٦٤٠٠٠}{\text{سه}+١٥} + ٢٠٠$$

فاد احدثت المقامات ثم اختصرت المعادلة وقسمت على مكرر المجهول ذى الدرجة الثانية حدث

$$\text{سه} + ١١٠ = ٣٣٧٥ \text{ ومنها يستخرج}$$

$$\text{سه} = \pm ٥٥ - \sqrt{٣٣٧٥ + (٥٥)^2} \text{ او}$$

$$\text{سه} = \pm ٥٥ - \sqrt{٣٣٧٥ + ٣٠٢٥} = \pm ٥٥ - \sqrt{٦٤٠٠} \text{ او}$$

$$\text{سه} = \pm ٥٥ - ٨٠ \text{ اى سه} = ٢٥ \text{ و سه} = -١٣٥$$

اما مقدار سه = ٢٥ فانه يكون عدد خيل الالاي الاول وبناء على ذلك يكون العدد ٢٥ + ١٥ اى ٤٠ عدد خيل الالاي الثانى واما مقدار سه = -١٣٥ فانه محقق للمعادلة فقط

١: (المسئلة السابعة) *

ثلاث فرق من القعله اذا اشتغلت معا فى شغلة معينة اتمتها فى ظرف ١٥ ساعة واما اذا اشتغلت كل واحدة منها على حدها فان الاولى تستغرق اربعة اخماس الرمن الذى تستغرقه الفرقة الثانية فى اتمام الشغلة المذكورة وان الثانية تستغرق قدر ما تستغرقه الفرقة الثالثة من

الرمن

الزمن ناقصا ١٥ ساعة فكم يكون مقدار الزمن الذى تستغرقه كل فرقة من هذه الفرق الثلاثة

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف s للزمن الذى تستغرقه الفرقة الثانية فى اتمام الشعلة المذكورة فيكون $\frac{4}{s}$ هو الزمن الذى تستغرقه الفرقة الاولى ويكون $s + 10$ هو الزمن الذى تستغرقه الفرقة الثالثة وادادقربا بمقدار الشعلة بالعدد ١ يكون $\frac{1}{\frac{4}{s}}$ هو مقدار شغل الفرقة الاولى فى ساعة واحدة و $\frac{1}{s}$ مقدار شغل الفرقة الثانية فى ساعة واحدة و $\frac{1}{s+10}$ مقدار شغل الفرقة الثالثة فى ساعة واحدة فحدث هذه المعادلة

$$1 = \frac{10}{s+10} + \frac{10}{\frac{4}{s}} + \frac{10}{s}$$

وبحذف المقامات يحدث $1 = \frac{10}{s+10} + \frac{10}{s} + \frac{70}{s}$
 $70 = 70 + 1120 + s + 60 + 900 + s + 60 + s = 2020 + 3s$
 $4 = s + 60$ وبهتمة جميع الحدود على s وتحويل الحدود المتشابهة الى طرف واحد واحتصارها وتغيير العلامات يحدث

$$4 = s - 130 = 2020 \text{ ومنها}$$

$$s = \frac{220}{8} + \frac{130}{8}$$

فنتذنيكون مقدار المجهول

$$s = 40 \text{ و } s = 11 \frac{1}{2}$$

ومقدار $s = 40$ هو عدد الساعات التى تستغرقها الفرقة الثانية فى اتمام الشعلة المعينة فبناء على ذلك يكون ٣٦ عدد الساعات التى تستغرقها الفرقة الاولى لاطعام ما ذكر ويكون ٦٠ عدد الساعات التى تستغرقها الفرقة الثالثة

* (١٧٤) *

واما مقدار $\text{سم} = 11 \frac{1}{2}$ فهو موافق لمنطوق المسئلة فلا يكون
حلالها وانما هو محقق للمعادلة فقط

* (مسالتان يحلان بواسطة التناسب العددي) *

* (المسئلة الاولى) *

من المقرر في علم الطبيعة ان المسافات التي يتقطعها الجسم الساقط المجرد عن
العوائق في طرف اربع ثوان تكون متناسبة عديدة فادافرض ان قلة
استغرقت ٤ ثوان مدة سقوطها فقطعت ٩٠٤ ر^م في الثانية الاولى
و ٧١٣ ر^م في الثانية البانية و ٥٢٢ ر^م في الثانية الثالثة
فاما مقدار المسافة التي قطعها القلة المدكورة في الثانية الرابعة
فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف سم للمسافة التي قطعها القلة في الثانية
الرابعة فتحديث هذه المتناسبة

$$\begin{aligned} & ٩٠٤ \text{ ر}^{\text{م}} \cdot ٧١٣ : ١٤٧ : ٥٢٢ \text{ ر}^{\text{م}} \cdot \text{سم} \text{ ومنها يستخرج} \\ & \text{سم} = ١٤٧ + ٥٢٢ - ٩٠٤ = ٢٤٧ \text{ ر}^{\text{م}} = ٢٣٥ \text{ ر}^{\text{م}} - ٣٩ \text{ ر}^{\text{م}} = ١٩٦ \text{ ر}^{\text{م}} \\ & \text{او سم} = ٣٤٣ \text{ ر}^{\text{م}} \end{aligned}$$

فيكون مقدار $\text{سم} = ٣٤٣ \text{ ر}^{\text{م}}$ هو المسافة المطلوبة وبناء على ذلك
تكون القلة قد قطعت ٧٨٤٧٠ في مدة الاربع ثواني

* (المسئلة الثانية) *

قطر قلة عيارها ٢٤ رطلا محصور بين ١٤٩ و ١٧ ميليميرا
و ١٤٧ و ١٤٧ ميليميرا فاما يكون القطر المتوسط لهذه القلة
فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف سم للقطر المطلوب فتحديث هذه
المتناسبة

$$\begin{aligned} & ١٤٩ \text{ ر}^{\text{م}} \cdot ١٧ : \text{سم} : ١٤٧ \text{ ر}^{\text{م}} \cdot ١٤٧ \text{ ر}^{\text{م}} \text{ ومنها يحدث} \\ & \text{سم} = ٢٩٦ \text{ ر}^{\text{م}} \text{ اي } \text{سم} = ١٤٨ \text{ ر}^{\text{م}} \cdot ٣٢ \text{ ميليميرا} \end{aligned}$$

(١٧٥)

وهو مقدار القطر المتوسط المطلوب

(مسائل تحل بواسطة التناسب الهندسي)

• • • (المسئلة الاولى)*

ماهية جيش محتوي على ١٢٥٠٠ عسكري بلغت ٢٥٠٢٥٠ غرشا
فما مقدار ماهية جيش يحتوي على ١٨٧٥٠ عسكريا فترض ان ماهية
كل نفر من انهار الجيشين واحدة

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف x لماهية الجيش الثاني فتكون
ماهية النفر الواحد منه $\frac{x}{18750}$ وحيث كانت ماهية النفر الواحد من
الجيش الاول مينة بالكسر $\frac{250250}{12500}$ حدثت هذه التساوية

$$\frac{x}{18750} = \frac{250250}{12500} \text{ ومن ذلك تحدث هذه النسبة}$$

$$x : 18750 :: 250250 : 12500$$

ومها يستخرج $x = \frac{18750 \times 250250}{12500}$ اي
 $x = 375375$ غرشا وهو ماهية الجيش الثاني وكان يمكن استخراج
مقدار المجهول x من المعادلة

$$\frac{x}{18750} = \frac{250250}{12500} \text{ بدون مدخلة للتناسب في ذلك}$$

• (المسئلة الثانية)*

جيش محاصر عنده من المؤنة ما يكفيه ٣٠ يوما بناء على ان للنفر الواحد
من الجيش المذكور في اليوم الواحد ٣٧٥ درهما فيكون المقدار
اللازم اعطاه للنفر الواحد من الجيش بحيث تكفيه هذه المؤنة ٣٤ يوما
فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف x لمقدار الدراهم اللازم اعطائها
لنفر الواحد في اليوم الواحد والحرف y لعدد التعيينات اللازم صرفها
في كل يوم الجيش فيكون 375 هو المقدار المصروف في كل
يوم من المؤنة في المدة الاولى وبناء على ذلك يكون مقدار المؤنة جمعها

٣٠ × ٣٧٥ وكذا يكون ٣٠ درهماء مقدار المنصرف في كل يوم
من المؤنة في المدة الثانية ويكون بناء على ذلك ٣٦ × ٣٦ مقدار المؤنة
جميعها وحيث نتحدث هذه المتساوية

$$٣٠ \times ٣٧٥ = ٣٦ \times ٣٦ \text{ أي}$$

$$٣٦ \times ٣٧٥ = ٣٠ \times ٣٦$$

ومنها نتخ هذه المتساوية

$$٣٦ : ٣٠ :: ٣٧٥ : ٣٦ \text{ ومنها يستخرج}$$

$$٣٦ = \frac{٣٧٥ \times ٣٠}{٣٦} = ٣١٢٥ \text{ درهما وهو ما يلزم اعطاءه للنفر الواحد}$$

من المؤنة في المدة الثانية

وكان يمكن استخراج مقدار المجهول ٣٦ من اول الامر من المعادلة

$$٣٦ = ٣٠ \times ٣٧٥ \text{ بدون مدخلة للتاسب في ذلك}$$

(المسئلة الثالثة)

اذا كان المطلوب قسمة عدد الى ثلاثة اجزاء مساوية لثلاثة اعداد معلومة يقال

ادارم بالحروف م م و م و ع للاجزاء الثلاثة المطلوبة وبالحروف

م و ل و ل للاعداد الثلاثة المعلومة وبالحرف م للعدد المعلوم الذي

يراد تقسيمه يحدث بين م م و م هذا الارتباط $\frac{م}{م} = \frac{م}{م}$ وبين

م م و ع هذا الارتباط $\frac{ع}{م} = \frac{م}{م}$ في الارتباط الاول يستخرج م

$$= \frac{م}{م} \text{ ومن الارتباط الثاني يستخرج ع} = \frac{م}{م} \text{ وحيث ان}$$

$$م + م + م = ع \text{ يكون}$$

$$م + م + م = \frac{م}{م} + \frac{م}{م} + \frac{م}{م} \text{ أي}$$

$$م = \frac{(١+٢+٣)م}{٣} \text{ ومنه يستخرج}$$

$$م = \frac{٦م}{٣} \text{ وبناء على ذلك يكون}$$

$$م = \frac{٢م}{١+٢+٣} \text{ و}$$

$$ع = \frac{٦م}{١+٢+٣} \text{ وهي مقادير الاجزاء المطلوبه}$$

وقد يحدث من هذه المعادلات الثلاث متساويات هي

* (١٧٧) *

$$\begin{aligned} & م + د + ل : م :: م : م و \\ & م + د + ل : م :: د : م و \\ & م + د + ل : م :: ل : ع \end{aligned}$$

فيشاهد منها أن نسبة مجموع الثلاثة أعداد المتناسبة المعلومة إلى العدد الذي يراد تقسيمه كنسبة أحد الأعداد المعلومة إلى الجزء المطابق له الذي يراد استخراج

ويشاهد من ذلك جميعه أنه يلزم كثير من التناسلات وناء عليه كثير من الضرب والقسمة بقدر ما يوجد من الأجزاء المناسبة التي يراد استخراجها لكن إذا فرض أن $\frac{م}{د+ل} = ك$ أمكن الاستغناء عن الاطالة المذكورة لانه بالفرض المدكور يكون

م = م ك و د = د ك و ع = ل ك اعني أنه يصرب خارج قسمه م على م + د + ل في العدد الاول يتكون الجزء الاول الذي يراد استخراج به وبضربه في العدد الثاني يتكون الجزء الثاني وبصره في العدد الثالث يتكون الجزء الثالث وقس على ذات ولتحل ذلك بمثالير يقول

* (المثال الاول) *

المطلوب قسمة مبلغ ٢٣٧٤٠٠٠ من العروش على عشرة بلوكات بحيث تكون اجزاء القسمة مناسبة لمقادير انفار النواكيات بعرض ان عدد اعمار الملك الاول ١٠٠ والثاني ٩٦ والثالث ١٠٤ والرابع ١٠٢ والخامس ٩٥ والسادس ٩٢ والسابع ٩٠ والثامن ٨٨ والتاسع ٨٤ والعاشر ٨٠ فحل ذلك يقال من حيث ان عدد اعمار السلوكات جميعها يعادل ٩٣١ يكون $\frac{٢٣٧٤٠٠}{٩٣١} = ٢٥٠$ عرشاً ويمتصى ما ذكر في المسألة لئلا يضل العدد ٢٥٠ عرشاً المساوي ك في عدد اعمار كل فرقة بالتوالي نتج ما يخص كل بلوك من العروش فينقسم السلوك الاول ٢٥٠ عرشاً والثاني

* (٢٤) *

٢٤٤٨ والثالث ٢٦٥٢ والرابع ٢٦٠١ والخامس ٢٤٢٢,٥٠ والسادس ٢٣٤٦ والسابع ٢٢٩٥ والثامن ٢٢٤٤ والتاسع ٢١٤٢١ والعاشر ٢٠٤٠ غرشا

ويمكن اجتناب كثرة الضرب واختصار الحسابات بكيفية ان يقال من حيث ان خارج قسمة ٢٢٧٤٠,٥ غرشا على العدد ٩٣١ الذي هو مجموع عدد انهار البلوكات يعين ما يخص القر الواحد يكون بناء على ذلك جدول هكذا

قر	غرش
١	٢٥,٥٠
٢	٥١,٠٠
٣	٧٦,٥٠
٤	١٠٢,٠٠
٥	١٢٧,٥٠
٦	١٥٣,٠٠
٧	١٧٨,٥٠
٨	٢٠٤,٠٠
٩	٢٢٩,٥٠

فلم يبق شئ غير اجراء عملية الجمع فلهذا

البلوك الاول	البلوك الثاني
عدد الانهار ما يخص البلوك	عدد الانهار ما يخص الانهار المذكورة
من العروش	من العروش
١٠٠	٩٠
٢٥٥٠	٢٢٩٥
	٠٠٥٣
	<hr/>
	٢٢٤٨
	<hr/>
	٩٦٥

وبان ذلك ان يقال حيث ان عدد انهار البلوك الاول يبلغ ١٠٠ تقريبا
 فتحصيل ما يخصه من العروش يؤخذ ما يقابل العدد ١ من الجدول
 وتقدم الشرطة جهة اليمين خاتين فيتحصل ما يخصه وهو ٢٥٥٠ عرشا
 وكذلك لتحصيل ما يخص البلوك الثاني يحلل العدد ٩٦ الذي هو عدد
 انهاره الى ٩٠ + ٦ فاما لتحصيل ما يخص ٩٠ اى ٩ عشرات
 فيؤخذ من الجدول ما يقابل العدد ٩ وتقدم الشرطة فيه جهة اليمين خاتين
 واحدة فيكون ما يخص العدد ٩٠ قفرا هو ٢٢٩٥ واما لتحصيل
 ما يخص العدد ٦ فيؤخذ من الجدول المبلغ ١٥٣ عرشا المقابل للعدد
 ٦ فيكون ٢٤٤٨ ما يخص ٩٦ هرا
 وعلى مثل ذلك يكون العمل في التمانية بلوكات الاخر

* (المثال الثاني) *

المطلوب تقسيم ٤٣٢٥٢٤ مترامكعب اراضيها لعمل حديق على ٨
 الايات بحيث تكون اجزاء القسمة مناسبة لمقادير انهار الايات بمرصاته
 يوجد في الايات الاول ١٨٥٠ هرا وفي الثاني ٢٠٠٣ وفي الثالث
 ١٠٢٧ وفي الرابع ١٥٠٠ وفي الخامس ١٧١٤ وفي السادس
 ٩٨٠ وفي السابع ١٩٢٥ وفي الثامن ٢٥١٨
 لحل ذلك يقال حيث ان مجموع انهار الايات جميعها يعادل ٢٣٥١٧
 هرا يكون
$$ك = \frac{٤٣٢٥٢٤}{٢٣٥١٧} = ١٨$$
 مترامكعا وهو ما يخص
 انهار الواحد وبناء على ذلك يركب هذه الجدول

* (١٨٠) *

نقر	يخصه	متر مكعباً
١		٣٢
٢		٦٤
٣		٩٦
٤		١٢٨
٥		١٦٠
٦		١٩٢
٧		٢٢٤
٨		٢٥٦
٩		٢٨٨

ومنه يستنتج كافي المثال المتقدم ما يخص كل الاى

وهذا الجدول الذى يعين به ما يخص كل الاى

مرة الاى عدد الانوار ما يخص كل الاى من الامتار المكعبة

١	١٨٥٠	٥٩٢٠٠
٢	٢٠٠٣	٦٤٠٩٦
٣	١٠٢٧	٣٢٨٦٤
٤	١٥٠٠	٤٨٠٠٠
٥	١٧١٤	٥٤٨٤٨
٦	٠٩٨٠	٣١٣٦٠
٧	١٩٢٥	٦١٦٠٠
٨	٢٥١٨	٨٠٥٧٦

وعمل ذلك يكون العمل فيما اذا اريد توزيع مبلغ من الفروش على عدة قرى معلومة بحيث تكون اجراء التوزيع مناسبة لمقادير اطياف هذه القرى المذكورة او تقسيم مقدار من المكعبات يراد ردمها او حفرها لانشاء جسر او ترعة على عدة قرى بحيث تكون اجراء التقسيم مناسبة لمقادير انوار هذه

القرى

القرى وتس على ذلك جميع الأمثلة التي تكون من هذا القبيل

•(المسئلة الرابعة)•

المطلوب تقسيم ٩٥٩٥٤٥٠ غرشا على خادمين بحيث يكون
يرأ القسمة ماسمين لماهيت ما ولدة مكنتهما في الخدمة بفرض أن ماهية
الاول في السنة ٦٠٠٠ غرش ومدة مكنته في الخدمة ١٥ سنة وأن
ماهية الثاني في السنة ٥٠٠٠ غرش ومدة مكنته في الخدمة ٢٠
سنة

ولحل ذلك يقال حيث ان ثرى القسمة ماسان لحاصل ضرب
الماهيتين في المدين اعنى ماسمين ٦٠٠٠ × ١٥ اى ٩٠٠٠٠
و ٥٠٠٠ × ٢٠ اى ١٠٠٠٠٠ فيكون ما يخص الخادم الاول
بمقتضى ما تقدم ٤٥٤٥٠,٤٥ غرشا وما يخص الثانى ٥٠٥٠,٥٠
غرشا

•(المسئلة الخامسة)•

٣٠٠١ عامل مكثول ٥٠ يوما في عمل قطعة استحكامات طولها
٢٠٠١ مترو عرضها ٦ امتار وعمقها متران ولم يكن شغلهم في اليوم
الواحد الا ٨ ساعات فما يكون مقدار العملة اللازمة لعمل قطعة
استحكامات اخرى طولها ١٨٠ مترا وعرضها ٨ امتار وعمقها
٢٥٠ مترين في طرف ٤٠ يوما بشرط ان لا يشتغلوا في اليوم الواحد
الا ١٠ ساعات

فالجواب عن ذلك ان يقال حيث ان هذه المسئلة مركبة يجب سطرها
ونظمها في سلك القاعدة الثلاثية البسيطة تحويل الاثنى عشر عددا المحتوى
عليها منطوق المسئلة الى اربعة اعداد فقط وذلك ان يرمن بالحرف سه
للعدد المطلوب من العملة ثم يقال حيث أن ٣٠٠ عامل اشتغلت ٥٠
يوما في كل يوم ٨ ساعات يكون ٣٠ × ٨ × ٥٠ اى ١٢٠٠٠٠

هو عدد العملة الذين يعملون قطعة الاستحكامات الاولى في ظرف ساعة واحدة وكذا يقال حيث ان s عبارة عن عدد العملة الذين يعملون قطعة الاستحكامات الاخرى في ظرف $\frac{1}{2}$ يوم في كل يوم ١٠ ساعات يكون $s = 40 \times 10$ اي ٤٠٠ s هو عدد العملة اللازمة لعمل الاستحكامات الاخرى في ساعة واحدة و $\frac{1}{2}$ كذا يقال حيث ان $\frac{1}{2}$ مكمب القطعة الاستحكامات الاولى يعادل $200 \times 6 \times 2$ اي ٢٤٠٠ متر مكمب وان مكمب القطعة الثانية يعادل $180 \times 8 \times 200$ اي ٣٦٠٠ متر مكمب تؤل المسئلة الى ابط منها وهي ان يقال حيث ١٢٠٠٠٠ عامل اشتعلوا ٢٤٠٠ متر مكمب في ظرف ساعة واحدة وان ٤٠٠ s عامل اشتعلوا ٣٦٠٠ متر مكمب في ظرف ساعة واحدة تحدث هذه المتباعدة

$$2400 : 3600 :: 120000 : 400 \text{ م } s \text{ و } s$$

$$\text{يستخرج } 400 \text{ م } s = \frac{120000 \times 3600}{2400} = 180000$$

$$s = \frac{180000}{450} = 400$$

حيث يدلم ٤٥٠ فاعلا لعمل قطعة الاستحكامات الاخرى في المدة المعينة في رأس السؤال

• (مسائل تحل بواسطة قواعد المتواليات العددية) •

بملاحظة ما هو مقرر في علم الميكانيكا في قواعد تحرك سقوط الاجسام من ان المسافة التي يقطعها جسم ساقط في زمن قدره s تعادل $\frac{1}{2} g s^2$ يفرض ان g مقدار جنب الارض للاجسام وهو بمقتضى مادك عليه التحارب يساوي ٩٨٠٨ متر في الثانية الواحدة في باريس و ٩٧٨٠ متر تقريبا في مصر تحل مسائلتان الاولى والثانية من المسائل الآتية

• (المسئلة الاولى) •

ما الارتفاع الذي تصل اليه بية تستغرق في صعودها زمنا كالزمن الذي

تستغرقه

• (١٨٣) •

تستغرقه في الهبوط بفرض انها تستغرق في الصعود والهبوط زمنا مقدرا
عشر ثوان

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف s للارتفاع المطلوب فيكون

$$s = \frac{1}{4} s^2 = 490.4 \times s^2 \text{ وحيث كان } s = 5 \text{ يكون}$$

$$s = 490.4 \times 5^2 = 12260.0 = 25 \times 490.4$$

ميترا وهو الارتفاع المطلوب

• (المسئلة الثانية) •

جسم سقط من اعلى منارة ارتفاعها ٧٨٤٦٤ مترا ما يكون مقدار الزمن
الذي استغرقه الجسم المذكور في سقوطه

$$\text{فالجواب عن ذلك ان يقال من المعادلة } s = \frac{1}{4} s^2 \text{ اى } 78464$$

$$= 490.4 \times s^2 \text{ يستخرج } s = \frac{78464}{490.4} = 16 \text{ اى } s = 4$$

اعنى ان الجسم المذكور يستغرق في سقوطه مقدارا من الزمن قدره ٤
ثوان

• (المسئلة الثالثة) •

غيطاى كان يسقى مائة شجرة موضوعة على استقامة واحدة وبعد كل منها عى
محاورها ٥ امتار بشرط ان الشرا الذي يؤخذ منه الماء على امتداد
خط الشجر بعيدا عن الشجرة الاولى بمقدار عشرة امتار ما تكون
المسافة التي يقطعها الغيطاى المذكور في الذهاب والاياب لسقى المائة شجرة
المذكورة

فالجواب عن ذلك انه اذا توكل في منطق المسئلة يشاهد ان الغيطاى المذكور
يقطع ٢٠ مترا في سقى الشجرة الاولى و ٣٠ مترا في سقى الثانية و ٤٠
مترا في سقى الثالثة و ٥٠ مترا في سقى الرابعة وهلم حرا فبما عليه تكون
المسافة التي يقطعها الغيطاى المذكور لسقى الشجر جميعه حاصل جمع حدود

(١٨٤)

متوالية عددية حدها الاول $= ٢٠$ واساسها $= ١٠$
وعدد حدودها $= ١٠٠$ ويستخرج هذا الحاصل من القانون

$$ع = \frac{٢٠ + ١٠٠(١٠-٢)}{٢} \text{ بوضع مقادير } ٢٠ \text{ و } ١٠ \text{ و } ١٠٠ \text{ بدلاها فاذن يحدث}$$

$$ع = \frac{٢٠ + ١٠٠(١٠-٢)}{٢} = \frac{٢٠ + ١٠٠ \times ٨}{٢} = ٩٩٠٠ + ٤٠٠ \text{ اى}$$

$ع = ١٠٥٠٠$ متر اى ١٥ دره ميريامترات اى ١٢ فرسحا
تقريبا

(المسئلة الرابعة)

غيطاني قطع مسافة قدرها ١٣٧٥٠ مترافي ذهابه وايابه لسقى مقدار
من الاشجار شجرة شجرة على استقامة واحدة وبعد كل منها عن
بجوارها ٥ امتار ولما وصل الى الشجرة الاخيرة لسقىها كان قد قطع
مسافة قدرها ٥٢٠ مترا مدها البئر الذى كان يفترق منه الموضوع
على استقامة الاشجار والمطلوب معرفة عدد الاشجار والعدة الذى بين البئر
والشجرة الاولى

فالجواب ان يقال حيث أن المسافة التى قطعها الغيطاني سقى الشجر جميعه
فى الذهاب هى غير المسافة التى قطعها فى الاياب تكون المسافة التى قطعها
فى الذهاب او الاياب مينة هذا المقدار $\frac{١٣٧٥٠}{٢}$ المساوى ٦٨٧٥
مترا وكذلك تكون المسافة التى قطعها لسقى الشجرة الاخيرة فى الاياب
او الذهاب مينة هذا المقدار $\frac{٥٢٠}{٢}$ المساوى ٢٦٠ وناء عليه يكون
من المسافات المقطوعة بالتوالى لسقى الشجر جميعه متوالية عددية اساسها
 $= ٥$ وحدها الاخير $= ٢٦٠$ ومجموع حدودها $ع = ٦٨٧٥$
ويستخرج عدد حدودها $د$ من هذا القانون

$$د = \frac{٢٦٠ + ٥(د-١)}{٥} \text{ بوضع مقادير } ٥ \text{ و } ٢٦٠$$

و ع بدلهما فاذا اجرىته ذلك تجد $\frac{20+20}{1} = 40$ فينتد

$\frac{20-20}{1} = 0$ و $\frac{20+20}{1} = 40$ فاما

المقدار $0 = 0$ فهو حل للمساألة (لانه باعتبار ذلك يكون المساوى $0 = 0$ اي $0 = 0$) وهو المقدار المحقق للمتوالية) اعني ان عدد الشجر يكون 0 شجرة والبعد الكائن ما بين الشجر والبئر الذي يغترف منه 10 مترا

واما المقدار الآخر 40 المساوى 0 فليس حلا للمساألة التي نحن بصدد حلها لانه باعتبار ذلك يحدث $0 = 10$

غير ان مقداري 0 المتقدمين يحلان مع المتوالية العددية التنازلية التي اكد حدودها $0 = 26$ واساسها $0 = 0$ وحاصل جمع حدودها $6870 = 0$

• (السؤال الخامسة) •

اذا كان المطلوب البحث عن القانون الذي يعبر به حاصل جمع مربعات حدود متوالية عددية بفرصان 0 و 1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6 و 7 و 8 و 9 و 10 و 11 و 12 و 13 و 14 و 15 و 16 و 17 و 18 و 19 و 20 و 21 و 22 و 23 و 24 و 25 و 26 و 27 و 28 و 29 و 30 و 31 و 32 و 33 و 34 و 35 و 36 و 37 و 38 و 39 و 40 و 41 و 42 و 43 و 44 و 45 و 46 و 47 و 48 و 49 و 50 و 51 و 52 و 53 و 54 و 55 و 56 و 57 و 58 و 59 و 60 و 61 و 62 و 63 و 64 و 65 و 66 و 67 و 68 و 69 و 70 و 71 و 72 و 73 و 74 و 75 و 76 و 77 و 78 و 79 و 80 و 81 و 82 و 83 و 84 و 85 و 86 و 87 و 88 و 89 و 90 و 91 و 92 و 93 و 94 و 95 و 96 و 97 و 98 و 99 و 100 و 101 و 102 و 103 و 104 و 105 و 106 و 107 و 108 و 109 و 110 و 111 و 112 و 113 و 114 و 115 و 116 و 117 و 118 و 119 و 120 و 121 و 122 و 123 و 124 و 125 و 126 و 127 و 128 و 129 و 130 و 131 و 132 و 133 و 134 و 135 و 136 و 137 و 138 و 139 و 140 و 141 و 142 و 143 و 144 و 145 و 146 و 147 و 148 و 149 و 150 و 151 و 152 و 153 و 154 و 155 و 156 و 157 و 158 و 159 و 160 و 161 و 162 و 163 و 164 و 165 و 166 و 167 و 168 و 169 و 170 و 171 و 172 و 173 و 174 و 175 و 176 و 177 و 178 و 179 و 180 و 181 و 182 و 183 و 184 و 185 و 186 و 187 و 188 و 189 و 190 و 191 و 192 و 193 و 194 و 195 و 196 و 197 و 198 و 199 و 200 و 201 و 202 و 203 و 204 و 205 و 206 و 207 و 208 و 209 و 210 و 211 و 212 و 213 و 214 و 215 و 216 و 217 و 218 و 219 و 220 و 221 و 222 و 223 و 224 و 225 و 226 و 227 و 228 و 229 و 230 و 231 و 232 و 233 و 234 و 235 و 236 و 237 و 238 و 239 و 240 و 241 و 242 و 243 و 244 و 245 و 246 و 247 و 248 و 249 و 250 و 251 و 252 و 253 و 254 و 255 و 256 و 257 و 258 و 259 و 260 و 261 و 262 و 263 و 264 و 265 و 266 و 267 و 268 و 269 و 270 و 271 و 272 و 273 و 274 و 275 و 276 و 277 و 278 و 279 و 280 و 281 و 282 و 283 و 284 و 285 و 286 و 287 و 288 و 289 و 290 و 291 و 292 و 293 و 294 و 295 و 296 و 297 و 298 و 299 و 300 و 301 و 302 و 303 و 304 و 305 و 306 و 307 و 308 و 309 و 310 و 311 و 312 و 313 و 314 و 315 و 316 و 317 و 318 و 319 و 320 و 321 و 322 و 323 و 324 و 325 و 326 و 327 و 328 و 329 و 330 و 331 و 332 و 333 و 334 و 335 و 336 و 337 و 338 و 339 و 340 و 341 و 342 و 343 و 344 و 345 و 346 و 347 و 348 و 349 و 350 و 351 و 352 و 353 و 354 و 355 و 356 و 357 و 358 و 359 و 360 و 361 و 362 و 363 و 364 و 365 و 366 و 367 و 368 و 369 و 370 و 371 و 372 و 373 و 374 و 375 و 376 و 377 و 378 و 379 و 380 و 381 و 382 و 383 و 384 و 385 و 386 و 387 و 388 و 389 و 390 و 391 و 392 و 393 و 394 و 395 و 396 و 397 و 398 و 399 و 400 و 401 و 402 و 403 و 404 و 405 و 406 و 407 و 408 و 409 و 410 و 411 و 412 و 413 و 414 و 415 و 416 و 417 و 418 و 419 و 420 و 421 و 422 و 423 و 424 و 425 و 426 و 427 و 428 و 429 و 430 و 431 و 432 و 433 و 434 و 435 و 436 و 437 و 438 و 439 و 440 و 441 و 442 و 443 و 444 و 445 و 446 و 447 و 448 و 449 و 450 و 451 و 452 و 453 و 454 و 455 و 456 و 457 و 458 و 459 و 460 و 461 و 462 و 463 و 464 و 465 و 466 و 467 و 468 و 469 و 470 و 471 و 472 و 473 و 474 و 475 و 476 و 477 و 478 و 479 و 480 و 481 و 482 و 483 و 484 و 485 و 486 و 487 و 488 و 489 و 490 و 491 و 492 و 493 و 494 و 495 و 496 و 497 و 498 و 499 و 500 و 501 و 502 و 503 و 504 و 505 و 506 و 507 و 508 و 509 و 510 و 511 و 512 و 513 و 514 و 515 و 516 و 517 و 518 و 519 و 520 و 521 و 522 و 523 و 524 و 525 و 526 و 527 و 528 و 529 و 530 و 531 و 532 و 533 و 534 و 535 و 536 و 537 و 538 و 539 و 540 و 541 و 542 و 543 و 544 و 545 و 546 و 547 و 548 و 549 و 550 و 551 و 552 و 553 و 554 و 555 و 556 و 557 و 558 و 559 و 560 و 561 و 562 و 563 و 564 و 565 و 566 و 567 و 568 و 569 و 570 و 571 و 572 و 573 و 574 و 575 و 576 و 577 و 578 و 579 و 580 و 581 و 582 و 583 و 584 و 585 و 586 و 587 و 588 و 589 و 590 و 591 و 592 و 593 و 594 و 595 و 596 و 597 و 598 و 599 و 600 و 601 و 602 و 603 و 604 و 605 و 606 و 607 و 608 و 609 و 610 و 611 و 612 و 613 و 614 و 615 و 616 و 617 و 618 و 619 و 620 و 621 و 622 و 623 و 624 و 625 و 626 و 627 و 628 و 629 و 630 و 631 و 632 و 633 و 634 و 635 و 636 و 637 و 638 و 639 و 640 و 641 و 642 و 643 و 644 و 645 و 646 و 647 و 648 و 649 و 650 و 651 و 652 و 653 و 654 و 655 و 656 و 657 و 658 و 659 و 660 و 661 و 662 و 663 و 664 و 665 و 666 و 667 و 668 و 669 و 670 و 671 و 672 و 673 و 674 و 675 و 676 و 677 و 678 و 679 و 680 و 681 و 682 و 683 و 684 و 685 و 686 و 687 و 688 و 689 و 690 و 691 و 692 و 693 و 694 و 695 و 696 و 697 و 698 و 699 و 700 و 701 و 702 و 703 و 704 و 705 و 706 و 707 و 708 و 709 و 710 و 711 و 712 و 713 و 714 و 715 و 716 و 717 و 718 و 719 و 720 و 721 و 722 و 723 و 724 و 725 و 726 و 727 و 728 و 729 و 730 و 731 و 732 و 733 و 734 و 735 و 736 و 737 و 738 و 739 و 740 و 741 و 742 و 743 و 744 و 745 و 746 و 747 و 748 و 749 و 750 و 751 و 752 و 753 و 754 و 755 و 756 و 757 و 758 و 759 و 760 و 761 و 762 و 763 و 764 و 765 و 766 و 767 و 768 و 769 و 770 و 771 و 772 و 773 و 774 و 775 و 776 و 777 و 778 و 779 و 780 و 781 و 782 و 783 و 784 و 785 و 786 و 787 و 788 و 789 و 790 و 791 و 792 و 793 و 794 و 795 و 796 و 797 و 798 و 799 و 800 و 801 و 802 و 803 و 804 و 805 و 806 و 807 و 808 و 809 و 810 و 811 و 812 و 813 و 814 و 815 و 816 و 817 و 818 و 819 و 820 و 821 و 822 و 823 و 824 و 825 و 826 و 827 و 828 و 829 و 830 و 831 و 832 و 833 و 834 و 835 و 836 و 837 و 838 و 839 و 840 و 841 و 842 و 843 و 844 و 845 و 846 و 847 و 848 و 849 و 850 و 851 و 852 و 853 و 854 و 855 و 856 و 857 و 858 و 859 و 860 و 861 و 862 و 863 و 864 و 865 و 866 و 867 و 868 و 869 و 870 و 871 و 872 و 873 و 874 و 875 و 876 و 877 و 878 و 879 و 880 و 881 و 882 و 883 و 884 و 885 و 886 و 887 و 888 و 889 و 890 و 891 و 892 و 893 و 894 و 895 و 896 و 897 و 898 و 899 و 900 و 901 و 902 و 903 و 904 و 905 و 906 و 907 و 908 و 909 و 910 و 911 و 912 و 913 و 914 و 915 و 916 و 917 و 918 و 919 و 920 و 921 و 922 و 923 و 924 و 925 و 926 و 927 و 928 و 929 و 930 و 931 و 932 و 933 و 934 و 935 و 936 و 937 و 938 و 939 و 940 و 941 و 942 و 943 و 944 و 945 و 946 و 947 و 948 و 949 و 950 و 951 و 952 و 953 و 954 و 955 و 956 و 957 و 958 و 959 و 960 و 961 و 962 و 963 و 964 و 965 و 966 و 967 و 968 و 969 و 970 و 971 و 972 و 973 و 974 و 975 و 976 و 977 و 978 و 979 و 980 و 981 و 982 و 983 و 984 و 985 و 986 و 987 و 988 و 989 و 990 و 991 و 992 و 993 و 994 و 995 و 996 و 997 و 998 و 999 و 1000 و 1001 و 1002 و 1003 و 1004 و 1005 و 1006 و 1007 و 1008 و 1009 و 1010 و 1011 و 1012 و 1013 و 1014 و 1015 و 1016 و 1017 و 1018 و 1019 و 1020 و 1021 و 1022 و 1023 و 1024 و 1025 و 1026 و 1027 و 1028 و 1029 و 1030 و 1031 و 1032 و 1033 و 1034 و 1035 و 1036 و 1037 و 1038 و 1039 و 1040 و 1041 و 1042 و 1043 و 1044 و 1045 و 1046 و 1047 و 1048 و 1049 و 1050 و 1051 و 1052 و 1053 و 1054 و 1055 و 1056 و 1057 و 1058 و 1059 و 1060 و 1061 و 1062 و 1063 و 1064 و 1065 و 1066 و 1067 و 1068 و 1069 و 1070 و 1071 و 1072 و 1073 و 1074 و 1075 و 1076 و 1077 و 1078 و 1079 و 1080 و 1081 و 1082 و 1083 و 1084 و 1085 و 1086 و 1087 و 1088 و 1089 و 1090 و 1091 و 1092 و 1093 و 1094 و 1095 و 1096 و 1097 و 1098 و 1099 و 1100 و 1101 و 1102 و 1103 و 1104 و 1105 و 1106 و 1107 و 1108 و 1109 و 1110 و 1111 و 1112 و 1113 و 1114 و 1115 و 1116 و 1117 و 1118 و 1119 و 1120 و 1121 و 1122 و 1123 و 1124 و 1125 و 1126 و 1127 و 1128 و 1129 و 1130 و 1131 و 1132 و 1133 و 1134 و 1135 و 1136 و 1137 و 1138 و 1139 و 1140 و 1141 و 1142 و 1143 و 1144 و 1145 و 1146 و 1147 و 1148 و 1149 و 1150 و 1151 و 1152 و 1153 و 1154 و 1155 و 1156 و 1157 و 1158 و 1159 و 1160 و 1161 و 1162 و 1163 و 1164 و 1165 و 1166 و 1167 و 1168 و 1169 و $$

(١٨٧)

$$\text{او } \frac{2 + 2^2 + 2^3}{2} = 6$$

$$\frac{(1+2^2)(1+2)2}{2 \times 3 \times 1} = 6$$

فهذا هو القانون المطلوب

في تطبيق هذا القانون على معرفة عدد القل الموجودة في احدى الكومات الثلاث المعتاد تشكيلها في ججانات الطوبجية ادم من المعلوم انهم يضعون القل والقبر والبب على ثلاث صور متنوعة وهى الكومة الهرمية ذات القاعدة المربعة والكومة الهرمية ذات القاعدة المثلثية والكومة الممتدة المستطيلة القاعدة .

(في حساب الكومة الهرمية ذات القاعدة المربعة)

هذه الكومة تتركب من طبقات مربعة متزايدة الترتيب بالابتداء من رأس الشكل الى قاعدته فاذا ساكنا هذا الترتيب يكون في الطبقة الاولى قلة واحدة وفي الطبقة الثانية اربع قل وفي الثالثة تسع قل وفي الرابعة ست عشرة قلة وفي الخامسة خمسة وعشرون وهكذا الى الطبقة التى عمرها ٢ فاما تحتوى على ٢ قلة والطبقة الاخيرة يقال لها قاعدة الكومة ومجموع قل الكومة يكون حينئذ عبارة عن مجموع مربعات الاعداد الطبيعية بالابتداء من مربع العدد ١ الى مربع ٢ (و ٢ يدل على عدد القل التى تحتوى عليها كل صلع من القاعدة او كل حرف من احرف الكومة) فانما مر بالحرف ٢ لعدد القل المحتوية عليها الكومة ~~يصح~~ ونعنى

ما تقدم

$$\frac{(1+2^2)(1+2)2}{2 \times 1 \times 1} = 6$$

وهالحد ولا يمكن الاستغناء به عن القانون اذا كان عدد الطمقات ٢ فاقل وهو محقق للقانون ايضا

حرف	طبقة	كومة
١	١	١
٢٠	٤	٥
٣	٩	١٤
٤	١٦	٣٠
٥	٢٥	٥٥
٦	٣٦	٩١
٧	٤٩	١٤٠
٨	٦٤	٢٠٤
٩	٨١	٢٨٥
١٠	١٠٠	٣٨٥
١١	١٢١	٥٠٦
١٢	١٤٤	٦٥٠

فالصف الاول يدل على عدد الطبقات او على عدد القال الموجود في كل حرف من الكومة والصف الثاني يدل على عدد القال الموجود في كل طبقة والصف الثالث يدل على عدد القال الموجود في الكومة بقسامها

فإذا كان $2 = 10$ مثلاً اعني انه يوجد عشر طبقات يؤل القانون الى $ع = \frac{2 \times 11 \times 10}{1} = 380$ كما هو مبين بالجدول

• (في حساب الكومة الهرمية ذات القاعدة المثلثية) •
هذه الكومة تتركب من طبقات مثلثية متزايدة السطح بالانتهاء من الرأس الى القاعدة وكل طبقة عبارة عن مثلث متساوي الاضلاع ماعدا الطبقة الاولى فانها لا تحتوى الا على قلة واحدة وضلع الطبقة الثانية يحتوى على قلةين وضلع الثالثة على ثلاث قلال وضلع الرابعة على اربع وهكذا الى الطبقة التي عبرتها فان ضلعها يحتوى على ٣ قلة وعدد القلال التي تحتوى عليها

طبقة كانت عبارة عن مجموع حدود متوالية عددية حدها الاول ١ واساسها واحد كذلك وعدد حدودها يساوى عدد القل التي يحتوى عليها كل صلع من الطبقة المذكورة بحيث اذا كان صلع الطبقة يحتوى على ٢ قلة فالطبقة تحتوى على $\frac{2+2}{2}$ قلة اى $\frac{4}{2}$ فاذا كانت ٣

تساوى على التعاقب ١ و ٢ و ٣ و ٤ الخ فالطبقات تحتوى على $\frac{1+1}{2}$ و $\frac{2+2}{2}$ و $\frac{3+3}{2}$ و $\frac{4+4}{2}$ و $\frac{2+2}{2}$ قلة فاذا كان ع رمز العدد القل الموجودة فى الكومة كما تقدم يتحصل

$$ع = \frac{1+1}{2} + \frac{2+2}{2} + \frac{3+3}{2} + \frac{4+4}{2} + \dots + \frac{2+2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \dots + \frac{2}{2} = \frac{1+2+3+4+\dots+2}{2}$$

$$= \frac{(2+2)(1+2)2}{2 \times 2 \times 1} = \frac{2+2}{2} + \frac{(1+2)(1+2)2}{12} =$$

ولتكوين جدول لهذه الكومة كافعل ذلك بالكومة المقدمة يقال

حيث كانت الطبقة التي ضلعها يحتوى على ٢ قلة تتركب من صفوف مكونة متوالية عددية كالتوالية المتكونة من اعداد السرد الطيبى ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و و ٢ يكون عدد القل الموجود فى هذه الطبقة مساويا ١ + ٢ + ٢ + ٣ + ٤ + + ٢ وبناء على ذلك يتركب هذا الجدول

عدد قل الطبقات

١ = ١	فى الطبقة الاولى
٢ = ٢ + ١	فى الثانية
٦ = ٣ + ٢ + ١	فى الثالثة
١٠ = ٤ + ٣ + ٢ + ١	فى الرابعة
٢ + ٠٠٠ + ٤ + ٣٠ + ٢ + ١	فى الوتية

وبالتأمل في هذا الجدول يشاهد أن كل طبقة من طبقات هذه الكومة مكونة من إضافة الأعداد الطبيعية لبعضها على التعاقب إلى العدد الدال على عمرة الطبقة ويمتضي ذلك يحدث هذا الجدول

حرف	طبقة	كومة
١	١	١
٢	٣	٤
٣	٦	١٠
٤	١٠	٢٠
٥	١٥	٣٥
٦	٢١	٥٦
٧	٢٨	٨٤
٨	٣٦	١٢٠
٩	٤٥	١٦٥
١٠	٥٥	٢٢٠
١١	.	٢٩١
١٢	.	٣٦٥
١٣	.	٤٦٥
١٤	.	٥٩٥
١٥	٦٦٥	٧٦٥

فالصف الأول يدل على عدد الظل التي يحتوي عليها كل حرف من أحرف الكومة أو على عدد طبقات الكومة والثاني يدل على عدد الظل الموجودة في كل طبقة وأعداد هذا الصف مكونة من إضافة الأعداد الطبيعية لبعضها على التعاقب من ١ إلى العدد الدال على عمرة الطبقة والصف الثالث يدل على عدد الظل الموجود في الكومة بتمامها وأعداد هذا الصف مكونة من إضافة جميع أعداد الصف الثاني لبعضها على التعاقب إلى العدد

الذي

الذى نمرته ~~ك~~ عدد طبقات الكومة وحينئذ فكل من هذه الحواصل يبين بالضرورة مجموع قتل الكومة بنامه لانه عبارة عن مجموع طبقات هذه الكومة فاذا يوجد ٢٢٠ قلة في الكومة التي عدد طبقاتها ١٠ وبحقيق ذلك انه اذا وضع ١٠ بدل ٥ في القانون

$$ع = \frac{(١+٥)(٢+٥)}{١} \text{ آلى}$$

$$٢٢٠ = \frac{١٢ \times ١١ \times ١٠}{١} = ع$$

وهذا ما نتج عن الناتج المبين بالجدول

• (في حساب الكومة الممتدة المحتطية القاعدة) •

هذه الكومة تتركب من طبقات مستطيلة متزايدة السعة بالابتداء من القمة الى القاعدة وان الطبقة الاولى منها تحتوى على صف واحد من القتل فقط فاذا رمز بالحرف م لعدد القتل الكاسية فيه يكون في الطبقة الثانية صفان من القتل في كل صف منهما م + ١ قلة وفي الطبقة الثالثة ٣ صفوف في كل صف م + ٢ قلة وفي الطبقة الرابعة ٤ صفوف في كل صف منها م + ٣ قلة وفي الطبقة الـ ٥ صفان في كل صف منها م + ٤ قلة وبالنسبة الى ذلك فعدد القتل التي في الطبقة الـ ٥ تكون $(١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥) = ١٥$ فاذا وضع بدل ٥ اعداد ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ١٠٠٠٠ و بالتوالي في هذا القانون يحدث

$١ - ١ + م$	في الطبقة الاولى
$٢ - ٢ + م$	وفي الثانية
$٣ - ٣ + م$	وفي الثالثة
$٤ - ٤ + م$	وفي الرابعة
\vdots	\vdots
$٥ - ٥ + م$	وفي الطبقة الـ ٥

واذا رمز بالحرف ع لحاصل جمع الطبقات فيكون

$$ع = م(1 + 2 + 2 + 2 + 1) + (2 + \dots + 2 + 2 + 1) + (2 + \dots + 2 + 1)$$

$$- (1 + 2 + \dots + 2 + 1) + \frac{(1+2)2}{2} - \frac{(1+2)(1+2)2}{4} + \frac{(1+2)2}{4} \times م = ع$$

$$(1 - \frac{(1+2)2}{4} + م) \times \frac{(1+2)2}{4} = \frac{(3-2+2)(1+2)2}{4} =$$

ولا يمكن وضع جدول لهذه الكومة الا باعطاء م مقدارا اختياريا فاذا فرض ان م = ١٠ مثلاً نحصل هذا الجدول

عدد الطبقات	مقدار الطبقات	الكومة
١	١٠	١٠
٢	٢٢	٣٢
٣	٢٦	٦٨
٤	٥٢	١٢٠
٥	٧٠	١٩٠
٦	٩٠	٢٨٠
٧	١١٢	٣٩٢
٨	١٣٦	٥٢٨
٩	١٦٢	٦٩٠
١٠	١٩٠	٨٨٠
١٠٠	٠٠٠	١٠٠٠
لخ	لخ	لخ

فالصف الاول يدل على عدد طبقات الكومة وعلى عدد كل ضلع جاني وهذا الصف ايضا يدل على رتب الطبقات في الكومة المعلومة والصف الثاني يدل على عدد القل التي توجد في الطبقات المختلفة المكونة للكومة والصف المذكور

يتكون من القانون $(٢ + ٥ - ١)$ المتقدم بفرض $م = ١٠$ واعطاء
 جميع الاعداد الطبيعية ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ٦ و ٧ و ٨ و ٩ و ١٠ بالتوالي
 والصف الثالث اى عدد منه يحجب باضافة اعداد الصف الثانى من اسداه
 العدد الاول للصف المذكور الى العدد المحاذى له فى الوضع وهو مركب ايضا
 من حاصل جمع الطبقات وهو يحتوى على عدد قتل الكوم المناظرة وحينئذ
 فالحد العاشر ٨٨٠ يدل على انه يوجد ٨٨٠ قلة فى الكومة المستطيلة
 المركبة من ١٠ طبقات والقانون $ع = \frac{(٢-٥+٢)(١+٥)}{٢} = ١٠$
 اذا وضع فيه ١٠ بدل م و ١٠ بدل ٥ الى

$ع = \frac{٤٨ \times ١١ \times ١٠}{٢} = ٨٨٠$ وهونائج موافق للناجى الموجود بالجدول
 هذا كله اذا كانت الكومة تامة فاذا لم تكن الكومة تامة اعتبر تمامها ثم
 تحسب الكومة التامة والكومة التى لم اضافتها التقيم الكومة الناقصة
 والفرق بين هاتين الكومتين يعين الكومة الناقصة وللمثل لذلك فنقول

اذا فرض ان الكومة الهرمية الناقصة ذات القاعدة المربعة مركبة من ٤
 طبقات وكل ضلع من قاعدتها محتوى على ٨ قلات كانت الكاملة مركبة
 من ٨ طبقات ومحتوية على $\frac{١٧ \times ٩ \times ٨}{٢} = ٦٠٤$ قلة فاذا حذف
 منها $\frac{٩ \times ٥ \times ٤}{٢} = ٣٠$ قلة وهو المقدار الذى يوجد فى الاربع طبقات المتمة
 فالباقي الذى هو ١٧٤ يدل على عدد القلات الكائى فى الكومة الناقصة

واذا فرض ايضا ان الكومة الهرمية الناقصة ذات القاعدة المثلثية مركبة
 من خمس طبقات وكل ضلع من قاعدتها يحتوى على ٨ قلات كانت الكومة
 التامة مركبة من ٨ طبقات ومحتوية على $\frac{١٠ \times ٩ \times ٨}{٢} = ١٢٠$ قلة
 فاذا حذف منها $\frac{٥ \times ٤ \times ٣}{٢} = ١٥$ قلات وهو المقدار الذى يوجد فى
 الثلاث طبقات المتمة فالباقي ١٠٥ قلة يكون عدد القلات الموحود
 فى الكومة الناقصة

واذا فرض ان الكومة المستطيلة الناقصة مركبة من ٦ طبقات وكل
 ضلع من اضلاع قاعدتها يحتوى على ١٥ قلة وان صف القاعدة

العليا يحوى على ١٠ قلات كانت الكومة التامة مركبة من ١١٠ طبقات ومحتوية على $\frac{٢٦ \times ١١ \times ١٠}{١} = ٢٦٠$ قلة فإذا حذف منها $\frac{٢٤ \times ٥ \times ٤}{١} = ٨٠$ قلة وهو المقدار الذي يوجد في الأربع طبقات المتممة يكون الباقي ٥٨٠ هو الكومة الناقصة

ويتعين المضروب ٣٦ في هذا المثال بواسطة المضروب ٣ م + ٢ د - ٢
فلا دخل في القانون المتقدم وحيث كان ١٥ = م + د - ١
يكون م = ١٥ - ١٠ = ٥ و ١ = د - ١ وكذلك يكون المضروب ٢٤ في الكومة المتممة = ٢ × ٣ + ٢ × ٤ - ٢

وإذا كان المطلوب معرفة عدد طبقات كومة هرمية ذات قاعدة مربعة بعدد معرفة عدد التل المحتوية عليه الكومة أمكن بواسطة الجدول الممتد امتدادا كافيا لهذا الغرض الاستعانة بـ إجراء عملية الحساب بأن يبحث في الخط الثالث عند عدد قلات الكومة فالعدد الموجود في الخط الأول المقابل لهذا العدد يعين مقدار الطبقات الموجودة في الكومة فعلى ذلك إذا كانت الكومة تحتوي على ٦٥٠ قلة تكون مركبة من ١٢ طبقة

ويمكن أيضا حل هذه المسألة بواسطة القانون $\frac{٢٠ + ٢٢ + ٢٣}{١} = ع$ الذي فيه كمية ع معلومة بأن يستخرج منه كمية د لكن حيث أن هذه المعادلة بدرجة ثالثة فينصرح لها بالطرق المعتادة بكتفي بالبحث عن الجذر التكعيبي لأعظم مكعب يوجد في ٣ ع وهذا الجذر التكعيبي يكون مقدارا للكمية د أن وافق مقدار ع كومة كاملة وبرهان أن يستخرج من المعادلة المتقدمة هذه المعادلة

$$\frac{٢}{١} + \frac{٢٢}{٢} + \frac{٢٣}{٣} = ع$$

ومنه يتبع $٢٠ < ع < ٢٢$ ، $(١ + د) > ع$

$$\frac{٢}{٢٢} < ١ + د < \frac{٢}{٢٠}$$

فعلى

فعلى ذلك تكون الكمية ٥. الجذر التكعيبي لاعظم مكعب موجود في كمية

$$٣ ع فاذا تذكرنا ان (١ + ٥) = ٢ + ٥ + ٣ + ٢ + ١$$

يحدث كما فرضنا ٣ ع او $\frac{٢}{١} + \frac{٢}{٢} + \frac{٢}{٣} > (١ + ٥)$

فاذا كان المطلوب معرفة عدد طبقات الكومة ذات القاعدة المثلثية من

$$\text{القانون ع} = \frac{(٢ + ٥)(١ + ٥)٥}{١} = ٢٢ + ٢٢ + ٢٢$$

$$٦ ع = ٢ + ٣ + ٤$$

وينتج من ذلك

$$٦ ع < ٢ و (١ + ٥) > ٦ ع$$

فكمية ٥ تكون حينئذ الجذر التكعيبي لاعظم مكعب موجود

في مقدار ٦ ع

واما الكومة المستطيلة فثبت ان يدخل في قانونها

$$ع = \frac{(٢ - ٥ + ٢٣)(١ - ٥)٥}{١} \text{ ثلاث مجاهيل مختلفة يلزم معرفة}$$

مجهولين من هذه المجاهيل الثلاثة لتعيين الثالث

تم طبع المتحة الزهرية • في الاعمال الجبرية • بطبعة مدرسة الهندسة

الخليوية • الكائمة سولاق مصر الجمية • ملحوظا بعناية

فاطرها من تلافى رتب الحد وتدارك • سعادة على بيك

مبارك • في واسط شوال المبارك • الذي هو

من شهر سن ١٢٦٩ هجرية • على

صاحبها افصل الصلاة

وازكى التحية